正規分布の母数のベイズ推定

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学大学院 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論　L04(2026-05-11 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-11 Mon 17:42 JST hig"

今日の目標

- 正規分布の母平均値をベイズ推定できる
- 正規分布の共役分布がまた正規分布であることを説明できる

L03-Q1
Quiz 解答: ベータ分布

1. $$\begin{aligned}\mathrm{E}[\Theta] &= \int_0^1 \theta \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a}{a+b} \times \int_0^1 \frac{\Gamma(a+1b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}\theta^{(a+1)-1}(1-\theta)^{b-1}\mathrm{d}\theta = \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$
2. $\mathrm{V}[\Theta] = \mathrm{E}[\Theta^2] - \mathrm{E}[\Theta]^2$. $\mathrm{E}[\Theta^2]$ は $\mathrm{E}[\Theta]$ と同様に.
3. $f'(\theta) = 0$ を θ について解く.

L03-Q2

Quiz 解答: 区分的線形な事後確率密度のベイズ MAP, EAP, MED 推定

L03-Q3

Quiz 解答: 母比率の区間推定

A 候補に投票したを $X=1$, しなかったを $X=0$ とする.

1. 標本比率は $\hat{p}=\frac{35}{50}=0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する.
2. 母比率 p の信頼係数 $1-\alpha=0.95$ の信頼区間は,
   $\Phi^{-1}(1-\frac{0.05}{2})=z_{0.05/2}=1.96$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{7}{10}\cdot(1-\frac{7}{10})}{50}} <&p<\frac{7}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{7}{10}\cdot(1-\frac{7}{10})}{50}}\\
0.7-0.13 <&p<0.7+0.13\\
0.57 <&p<0.83
\end{aligned}
$$

$0.5 < 0.57$ なので，信頼係数 0.95 では当選ってことですね（放送用語「当選確実」こののりで判定を繰り返すと，20 回に 1 回に間違えるということ）

3. 母比率 p の信頼係数 $1-\alpha = 0.99$ の信頼区間は, $z_{0.01/2} = 2.58$ より

$$\frac{7}{10} - 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{7}{10}\cdot(1-\frac{7}{10})}{50}} < p < \frac{7}{10} + 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{7}{10}\cdot(1-\frac{7}{10})}{50}}$$
$$0.53 < p < 0.87$$

L03-Q4

Quiz 解答: 区分的線形な事後確率密度の信用区間と最高事後密度領域

1. $P(y \leq \ell) = P(y \geq u) = \alpha$ となるように定めて，$-\frac{6}{4} \leq y \leq \frac{7}{4}$.

2. 最高密度を $d(\leq \frac{1}{5})$ とおくと，$f(y) \leq d$ となる y の領域は $D = [-2+5d, -5d] \cup [\frac{5}{4}d, 2-\frac{5}{4}d]$.
   $1-\alpha = P(y \in D) = 1 - 5d^2 - \frac{5}{4}d^2$ を解くと，$d = \frac{1}{5}\alpha^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{25}$.
   よって，$D = [-2+\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [+\frac{\sqrt{5}}{20}, 2-\frac{\sqrt{5}}{20}]$.

L03-Q5

Quiz 解答: ベルヌイ分布の事後予測分布

1. $\mathrm{beta}(k+1, N-k+1)$.
2. $f(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 - f(1) & (\tilde{x} = 0) \\ \mathrm{E}[Y|X] = \frac{k+1}{N+2} & (\tilde{x} = 1) \end{cases}$

ここまで来たよ

3 共役事前分布・母数の区間推定

4 正規分布の母数のベイズ推定

- 頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測
- 正規モデル（母分散固定）のベイズ推定
- 正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測 確率統計 I(2023)L??

ドーナツ製造機は，母平均値 μ g, 母分散 σ^2 g^2 の正規分布にしたがう質量 x g のドーナツを作り出す．$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. σ^2 はなぜか既知．

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

測定値 $x_1, \dots, x_N$ が得られた．μ を推定したい．

μ の点推定標本平均値 $\overline{x} = \frac{1}{N}(x_1 + \cdots + x_N)$.

μ の区間推定

信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間 (Φ は標準正規分布の累積分布関数)

$\overline{x} - \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\sqrt{\sigma^2/N} < \mu < \overline{x} - \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\sigma^2/N}$.

次の値 $\tilde{x}$ の予測分布 $f(\tilde{x}|\overline{x}, \sigma^2)$.

$\mu \neq \mu_0$ を対立仮説とする有意水準 α の両側検定

標本平均値が棄却域 $\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ に入れば，$\mu \neq \mu_0$ と結論

$\mu > \mu_0$ を対立仮説とする有意水準 α の片側検定

標本平均値が棄却域 $\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1-\alpha)$ に入れば，$\mu > \mu_0$ と結論

ここまで来たよ

3 共役事前分布・母数の区間推定

4 正規分布の母数のベイズ推定
- 頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測
- 正規モデル（母分散固定）のベイズ推定
- 正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

正規モデル（母平均値パラメタ）

モデル=条件付き確率=尤度
ドーナツ製造機は，*母平均値* μ g, *母分散* σ^2 g^2 の正規分布にしたがう質量 x g のドーナツを作り出す．$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ が，確率変数と見なす*母数*（これまで Y と呼んでいた）．σ^2 は固定して定数と思う．
共役分布は，各測定値 x_i の同時分布を「μ の分布としてみたもの」になりそう…また正規分布じゃん．
μ の事前分布を，$\mathrm{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ としてみる．

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

μ_0, σ_0 は，*母数の分布を決める母数*，という意味で，hyper-parameter(*超母数*) と呼ばれることがある（特に機械学習や情報統計力学で）．

標本 $x_1, \dots, x_N$.
μ の事後分布は

$$
\begin{aligned}
f(\mu|x_1,\dots,x_N) &= \frac{f(x_1,\dots,x_N|\mu)f(\mu)}{\int f(x_1,\dots,x_N|\mu)f(\mu)\,\mathrm{d}\mu} \\
&= \frac{1}{Z}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i-\mu)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}
\end{aligned}
$$

Z は全確率が 1 になるための因子．$x_1, \dots, x_N$ の周辺分布．
計算 μ のどんな分布？

L04-Q1

Quiz(正規分布の母平均値のベイズ推定)

確率変数 X は, 正規分布にしたがう. すなわち,

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

母数 μ の事前分布を次として，μ のベイズ推定を考える.

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

1. X のサイズ 1 の標本として, x_1 が得られたとき, μ の事後分布を求めよう. μ の母平均値, 母分散を求めよう.
2. X のサイズ 2 の標本として, x_1, x_2 が得られたとき, μ の事後分布を求めよう. μ の母平均値, 母分散を求めよう.

$$\mu|X \sim \mathrm{N}\left(\frac{\sigma_0^{-2}\mu_0 + N\sigma^{-2}\frac{1}{N}\sum_i x_i}{\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}}, (\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2})^{-1}\right)$$

たしかに共役事前分布だった！

事後分布の解釈

分散

$\mathrm{V}[\mu]^{-1} = \sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}$.
$\sigma^{-2} = 1/$分散 を分布の精度 (precision) とでも呼んだ方がイメージがわき，式も簡単になる．大きい方が位置の正確な指定になっている．
解釈：事後分布の精度は，事前分布の精度と，条件付き分布の精度の合計になっている．

EAP

$\mathrm{E}[\mu] = \frac{\sigma_0^{-2}}{\sigma_0^{-2}+N\sigma^{-2}}\mu_0 + \frac{N\sigma^{-2}}{\sigma_0^{-2}+N\sigma^{-2}}\frac{1}{N}\sum_i x_i$.
解釈：事後分布の母平均値は，事前分布の母平均値と，観測値の標本平均値の，重み（精度で）つき平均になっている．

L04-Q2

Quiz(正規分布の母平均値のベイズ推定)

あるドーナツ屋さんの作るオールドファッションドーナツの重さ X (g) は，未知の母平均値 μ g, 既知の標準偏差 3 g の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, 3^2)$ にしたがう．母平均値 μ の事前分布は，$\mathrm{N}(100, 5^2)$g と考えている．
オールドファッションドーナツ 10 個の重さを測定したところ，標本平均値は 102 g だった．

1. μ の事後分布を求めよう（改めて積分しなくても，共役事前分布についての「公式」を使ってよい）
2. μ を MAP 推定しよう．
3. μ を EAP 推定しよう．
4. μ の，信頼係数 0.95 の HPD を求めよう．
5. μ が 100 より大きい確率を求めよう．
6. μ を MLE 推定（最尤推定）しよう．

正規分布の再生性

確率変数 $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ が独立のとき,
和の確率変数 $S = X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

モーメント母関数を使うと楽に 確率統計 II(2024)L??, 使わなくてもローテクな直接計算で証明できる.

事後予測分布（正規モデル（分散固定））

事前分布 $\mu \sim \mathrm{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, 観測値 $x_1, \dots, x_N$ のもとでの．

$$\begin{aligned} f_{\tilde{x}|x\dots}(\tilde{x}|x_1, \dots, x_N) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\tilde{x},\mu|x\dots}(\tilde{x}, \mu|x_1, \dots, x_N)\, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{0}^{+\infty} f_{x|\mu}(\tilde{x}|\mu) \times f_{\mu|x\dots}(\mu|x_1 \dots, x_N)\, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

$\tilde{X} - \mu \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$（モデル），
$\mu \sim \mathrm{N}(\bullet, \bullet)$（上で求めた），
これらは独立で，それぞれ正規分布にしたがうので，正規分布の再生性より，

$$\tilde{X} = (\tilde{X} - \mu) + \mu \sim \mathrm{N}(0 + \frac{\sigma_0^{-2}\mu_0 + N\sigma^{-2}\frac{1}{N}\sum_i x_i}{\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}}, \sigma^2 + (\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2})^{-1}).$$

統計的仮説検定に相当する主張

事後確率が大きい仮説 H_1 を採用

$$\frac{\int_{y \in H_1} \text{事後分布}\, \mathrm{d}y}{\int_{y \in H_0} \text{事後分布}\, \mathrm{d}y} = \frac{\int_{y \in H_1} f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x_1, \dots, x_N | y) f_{\mathrm{Y}}(y)\, \mathrm{d}y}{\int_{y \in H_0} f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x_1, \dots, x_N | y) f_{\mathrm{Y}}(y)\, \mathrm{d}y} > 1$$

(分母の周辺確率は分母分子でキャンセルされる)

両側検定相当

$P(|\mu - \mu_0| \leq \epsilon) = \int_{\mu_0 - \epsilon}^{\mu_0 + \epsilon} \text{事後分布}\, \mathrm{d}\mu$

片側検定相当

$P(\mu - \mu_0 > 0) = \int_{\mu_0}^{+\infty} \text{事後分布}\, \mathrm{d}\mu$

ここまで来たよ

3 共役事前分布・母数の区間推定

4 正規分布の母数のベイズ推定
- 頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測
- 正規モデル（母分散固定）のベイズ推定
- 正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

正規モデル（母分散パラメタ）

$$f_{x|\mu,\sigma}(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

母分散であれ，母標準偏差であれ，正の値のみをとる必要がある．事前分布として，次のような選択肢がある．

半正規分布

$Z \sim \mathrm{N}(0, s^2)$ に対し，$y = |Z|$ の分布が半正規分布．確率密度関数は

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi s^2}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2s^2}} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

s が hyper-parameter．事前情報がないとき，s 大で幅広く．

σ がこの分布にしたがうとき，σ^2 は自由度 1 のカイ二乗分布 χ^2_1 をスケール倍したものにしたがう．

$\boxed{Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2) \text{ のとき，} Y = Z^2 \sim \chi^2_1}$

半正規分布は，正規分布の共役事前分布ではない．

定義 (ガンマ分布)

次の確率密度関数を持つ連続型確率変数 Θ を，パラメタ a, λ のガンマ分布 $\mathrm{gamma}(a, \lambda)$ にしたがうという．

$$f(\theta|a,\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta} & (\theta > 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

指数分布は $\mathrm{gamma}(1, \lambda)$，自由度 n のカイ二乗分布は $\mathrm{gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

逆ガンマ分布

尤度の σ^2 依存性が，$\theta = 1/\sigma^2$ としたときのガンマ分布と同じである (σ^2 が逆ガンマ分布にしたがう，という) ことを考えると，逆ガンマ分布が共役事前分布になっている．

逆ガンマ分布は，以前は，共役事前分布として重宝されていたが，近年の，MCMC で数値的に求めれば，共役分布でなくてもいいじゃん，的のりでは，半正規分布のほうが便利に使われている．

正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

母平均値の正規分布と，母分散の逆ガンマ分布を（独立でなく）「絡ませた」，正規-逆ガンマ分布という 2 次元の同時分布が共役事前分布になる．