空間内の点と直線と平面の共有点

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L08(2025-05-02 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-02 Fri 11:34 JST hig"

今日の目標

- **教科書に追加** 平面のパラメタ表示を書ける
- **教科書に追加** 平面に垂直なベクトルが求められる
- 石村畑 線形代数 §1.4 直線と平面の共有点を求められる
- **教科書に追加** 点が平面上にあるかを判定できる

Quiz 略解

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \end{bmatrix} \rightsquigarrow \sum \blacksquare = \sum_{j=2}^{n} a_{2j} = \sum_{k=0}^{n-2} a_{2k+2} = \sum_{k=0}^{n-2} a_{2n-k}.$$

ここまで来たよ

7 行列の和とスカラー倍と積

8 daytitle
- 行列の積
- 空間内の平面のパラメタ表示
- 共有点の求め方

命題 (行列の積の非可換性 石村畑 線形代数 p.37)

A, B が行列で，積 AB が定義されるとき，
$AB = BA$ とは限らない．

反例

$\begin{pmatrix}\square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square & \square\end{pmatrix}$ では型が違う．

$\begin{pmatrix}\square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$ は定義されるが，$\begin{pmatrix}\square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square & \square\end{pmatrix}$ は定義されない．

定義されても $\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6 \\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 22 \\ 43 & 50\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 6 \\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23 & 34 \\ 31 & 46\end{pmatrix}$

命題 (行列の積の結合性)

A, B, C が行列で，積 $(AB)C$ が定義されるとき，
$(AB)C = A(BC)$.

この行列を ABC と略記する．

証明 両辺の型は同じ．成分は，

左辺$_{ij} = \sum_{\ell}(\sum_{k} a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j}$.

右辺$_{ij} = \sum_{k} a_{ik}(\sum_{\ell} b_{k\ell}c_{\ell j})$.

実演

$$\begin{pmatrix}\square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

左辺 $= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

右辺 $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ex+fz & ey+fw \\ gx+hz & gx+hz \end{pmatrix}$.

ここまで来たよ

7 行列の和とスカラー倍と積

8 daytitle
- 行列の積
- 空間内の平面のパラメタ表示
- 共有点の求め方

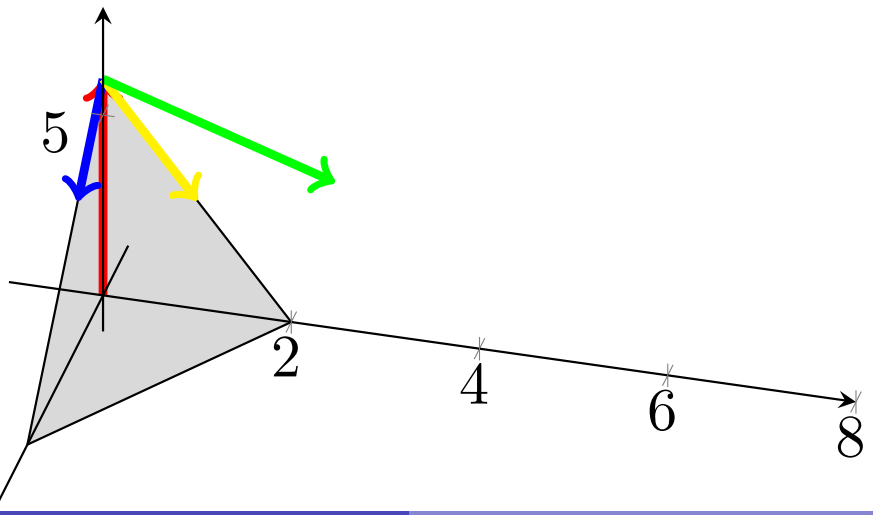
空間内の平面のパラメタ表示

$\vec{a}$ を通り, $\vec{d}, \vec{f}$ に平行な平面のパラメタ表示 教科書に追加

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d} + s\vec{f}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} + s\vec{f}$ $\quad (t, s \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\vec{d}, \vec{f}$: 接 (線) ベクトル. $\vec{d}, \vec{f} \neq \vec{0}, \vec{d}, \vec{f}$ は平行でない. あとで出てくる法 (線) ベクトル $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f}$.



平面の様々な表示

平面に平行な（しかしたがいに平行でない）ベクトル $\vec{d}, \vec{f}$ から，
平面に垂直なベクトル（法線ベクトル）のうちひとつを，外積 $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f}$ で作れる．
これを利用して，平面のパラメタ表示から，平面の方程式が作れる．

$\vec{a}$ を通り，$\vec{n}$ に垂直な平面の方程式 線形代数☆演習 I(2025)L06 | 石村畑 線形代数 p.21

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

直線の様々な表現次のどれからどれにでも書き替えられるように．

- 通る点，…と…と平行
- 通る点，接ベクトル
- パラメタ表示
- 通る点，…と垂直
- 通る点，法線ベクトル
- 法線ベクトルによるベクトル方程式
- 通る点 3 つ
- 通る点 1 つと平面上の直線
- 平面上の直線 2 つ

点と直線と平面のパラメタ表示と方程式のまとめ

	パラメタ表示 $t, s \in \mathbb{R}$	方程式
平面の点	$\vec{p} = (a_1, a_2)$	$x = a_1, y = a_2$
空間の点	$\vec{p} = (a_1, a_2, a_3)$	$x = a_1, y = a_2, z = a_3$
平面の直線	$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$	$\vec{n} \cdot ((x, y) - \vec{a}) = 0$
空間の直線	$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$	$\frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2} = \frac{z-a_3}{d_3}$
空間の平面	$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} + s\vec{f}$	$\vec{n} \cdot ((x, y, z) - \vec{a}) = 0$

$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ タイプは，直線とか平面とでなく「入れ物から 1 次元低下」

例

	パラメタ表示 $t, s \in \mathbb{R}$	方程式
空間の原点	$\vec{p} = (0, 0, 0)$	$x = 0, y = 0, z = 0$
空間の x 軸 (直線)	$\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x$	$y = z = 0$
空間の xy 平面	$\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x + s\vec{e}_y$	$z = 0$

L08-Q1

Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\vec{a} = (13, 2, 1)$ を通り, ベクトル $\vec{d} = (0, 1, 3), \vec{f} = (0, 5, 2)$ に平行な平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $(13, 9, 9), (1, 1, 3)$ はそれぞれ平面上にあるか，パラメタ表示から調べよう.
4. 点 $(13, 9, 9), (1, 1, 3)$ はそれぞれ平面上にあるか，ベクトル方程式から調べよう.

ここまで来たよ

7 行列の和とスカラー倍と積

8 daytitle
- 行列の積
- 空間内の平面のパラメタ表示
- 共有点の求め方

共有点（共通部分）の求め方

2 つの集合（点，直線，平面）の共有点を求めることを考える．
一方がパラメタ表示，一方が方程式で表現されているとやりやすい．必要ならどちらかを書き替える．
（パ – パ，方 – 方は，そのままでももいちおうできる．後ろを見て）．

パラメタ表示 – 方程式の 2 つの集合の共有点

$A = \{\vec{p}(t) | t \in \mathbb{R}\}, B = \{\vec{p} | f(\vec{p}) = 0.$
（パラメタは,$t, s, u, \ldots$ のように複数かも）
$\vec{r} \in A \cap B \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{r} = \vec{p}(t)$かつ$f(\vec{p}(t)) = 0.$
t について解き，t の動ける範囲を限定して，パラメタ表示を作り直す．
何を表すパラメタ表示か考える．

石村畑 線形代数 問題 4(p.22), 演習 4(p.23)

L08-Q2

Quiz(平面と直線の共有点)

直線 ℓ は，点 $(-1,-2,0)$ を通り，ベクトル $(3,1,2)$ に平行である．
平面 P は，点 $(0,0,1)$ を通り，ベクトル $(3,1,0),(0,1,-3)$ に平行である．
ℓ と P の共有点を求めよう．

石村畑 線形代数 問題 4(p.22), 演習 4(p.23)

L08-Q3

Quiz(パラメタ表示された平面とベクトル方程式で表示された直線の共有点)

x 軸と，
$(2,3,4)$ を通り $(2,0,1)$ と $(0,3,2)$ に平行な平面 P を考える．
x 軸と P の共有点を求めよう．

線形代数☆演習 I(2025)L6

他の方法も使える

パラメタ表示-パラメタ表示 線形代数☆演習 I(2025)L05, 方程式-方程式 (連立させればいい) の場合は，一方を別の表示に直してもいいし，そのまま直接できる場合もある．

これは「普通の」場合

ここでは，得た方程式やパラメタ表示が何を表すか見やすいケースのみを扱った．

ここで述べた共有点は，普通の場合のみ．たまたま 2 平面が平行とか，2 平面が重なるとかは考えてない．

石村畑 線形代数 §4では，そういう場合まで含めて，自動的に共有点の集合が求められるようになる．