連続型一様分布・確率変数の標準化

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L04(2025-05-12 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-17 Sat 08:29 JST hig"

今日の目標

- 母平均値母標準偏差の意味，scipy.stats の位置母数 location 尺度母数 scale との対応を説明できる
- 一様分布 久保川 統計学入門 §5.3.1 の意味が説明できる
- 確率変数の標準化 久保川 統計学入門 p.120 の意味が説明できる

L03-Q1
Quiz 解答: 指数分布の累積分布関数・確率・分位数

1.
$$
\begin{aligned}
F(x) =& P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,\mathrm{d}x' \\
=& \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \mathrm{d}x' = 0, & (x < 0) \\ \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x' + \int_{0}^{x} 3\mathrm{e}^{-3x'}\mathrm{d}x' = 0 + (1 - \mathrm{e}^{-3x}) & (x \ge 0). \end{cases}
\end{aligned}
$$

emark 広義単調増加, $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = +1, F'(x) = f(x)$ 成立？

2. $P(X \le 4) = F(4) - F(-\infty) = 1 - \mathrm{e}^{-3\cdot 4} - 0 = 1 - \mathrm{e}^{-12}$.

emark $\int_{-\infty}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{4} 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$ を直接計算しても求められが，$F(x)$ を求めておくと，積分は一度で済む．

3. $P(-5 < X \le 2) = F(2) - F(-5) = 1 - \mathrm{e}^{-3\cdot 2} - 0 = 1 - \mathrm{e}^{-6}$.

emark $\int_{-5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$ を直接計算しても求められる．

4. $F(d) = \frac{1}{7}$ を解いて，$d = -\frac{1}{3}\log\frac{6}{7} = \frac{1}{3}\log\frac{7}{6} (> 0)$.

emark $\int_{-5}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^d 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}$ を直接解いても求められる.

L03-Q2

Quiz 解答: 指数分布

間隔 X 分 は, パラメタ $\lambda = 1/30$ の指数分布にしたがう.

1. $P(5 < X \leq 10) = F(10) - F(5) = \int_5^{10} \frac{1}{30}\mathrm{e}^{-\frac{1}{30}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-5/30} - \mathrm{e}^{-10/30} =$ 数値.
2. $P(X > 80) = 1 - F(80) = \int_{80}^{+\infty} \frac{1}{30}\mathrm{e}^{-\frac{1}{30}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-80/30} =$ 数値.
3. $\mathrm{E}[X^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda = 30$.
4. 分位数関数は $q = F(x) = \mathrm{e}^{-x/30}$ を解いて，$x = F^{-1}(q) = -30\log q$. よって，$30\log(3/2)$ 分.

ここまで来たよ

復習：関数のグラフの平行移動拡大縮小

次の 2 次関数のグラフを考えよう．$x = b$ が対称軸．$a = 1/\sqrt{a'}$ は「広がり」

$$y = -a'(x-b)^2 + c = -(\tfrac{x-b}{a})^2 + c.$$

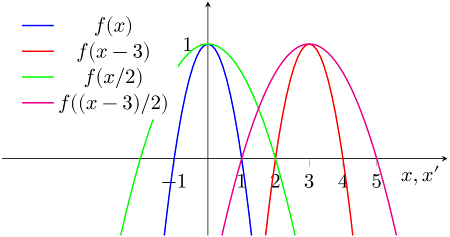
基本のグラフ $a = 1, b = 0 \rightsquigarrow y = f(x) = -x^2 + c$

x 方向に b だけ平行移動 $x = x' - b \quad y = f(x' - b)$

$x = 0$ を中心に x 方向に a 倍だけ拡大 $x = \frac{x'}{a} \quad y = f(\frac{x'}{a})$

まず $x = 0$ を中心に x 方向に a 倍だけ拡大，次に

x 方向に b だけ平行移動 $x = \frac{x'-b}{a} \quad y = f(\frac{x'-b}{a})$



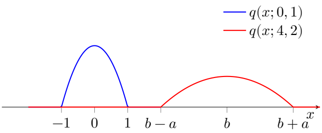
L04-Q1

Quiz(位置とスケールを持つ連続型確率変数)

連続型確率変数 X が，次の確率密度関数 $f(x) = q(x; b, a)$ を持つとき，分布 $Q(b, a)$ にしたがうと言うことにする．ここで，$b \in \mathbb{R}, a > 0$ の定数（パラメタ）である．

$$q(x; b, a) = \begin{cases} \frac{3}{4a}(1 - (\frac{x-b}{a})^2) & (|x - b| \leq a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $b = 0$ のとき モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう．
2. $b = 0$ のとき母標準偏差 $(\mathrm{Var}(X))^{1/2}$ を求めよう．
3. 一般の b で母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう．


$q(x;0,1)$
$q(x;4,2)$
-1
0
1
$b-a$
b
$b+a$
x

確率分布の位置と広がり

$X' \sim q(x;0,a)$ は，$q(x;0,1)$ を $x=0$ を中心に x 方向に a 倍に拡大したもの．
母標準偏差 $\mathrm{Var}(X')^{1/2}$ は，$q(x';0,a)$ の「広がり」を表している．尺度母数

$q(x;b,1)$ は，$q(x;0,1)$ を x 軸の方向に b だけ平行移動したもの．
$X' \sim q(x;b,1)$ のとき，変数変換 $x+b=x'$ により，

$$\mathrm{E}[X'] = \int_{-\infty}^{\infty} x' q(x';b,1)\mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{\infty} (x+b)q(x;0,1)\mathrm{d}x = 0+b.$$

母平均値 $\mathrm{E}[X']$ は，$q(x';b,1)$ の「位置」を表している．位置母数
母平均値は分布の位置，母標準偏差は分布の広がりを表す．

ここまで来たよ

連続型一様分布 久保川 統計学入門 §4.3.1

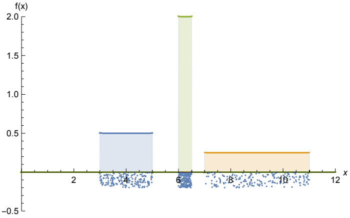
(連続型) 一様分布 $U(c,d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c,d]$ の連続型一様分布 $U(c,d)$ にしたがうという.

$$f(x) = u(x; b, a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (b - \frac{1}{2}a \leq x \leq b + \frac{1}{2}a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases},$$

$$u(x; \tfrac{c+d}{2}, d-c) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x \leq d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

連続型一様分布 久保川 統計学入門 §4.3.1



$$U(4,6), U(6,6.5), U(7,11).$$

連続型一様分布

```
import scipy.stats
rvx = stats.uniform(loc=c, scale=d - c)  # U(c,d)
```

Colab LearnMoodle 連続型確率変数-連続型一様分布.ipynb loc=位置, scale=尺度

L04-Q2

Quiz(連続型一様分布)

連続型確率変数 X が連続型一様分布 $U(c,d)$ にしたがう.

1. モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母標準偏差 $\mathrm{Var}(X)^{1/2}$ を求めよう.

さっき想像した，母平均値・母標準偏差の意味とマッチしてる?

		母ナントカ	scipy.stats
位置	位置母数	$\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}$	loc$=c$
広がり	尺度母数	$\mathrm{Var}(X)^{1/2} = \frac{d-c}{\sqrt{12}}$	scale$=d-c$

$U(c,d)$ に対するこの結果は, 公式のように記憶して使おう.

久保川 統計学入門 発展問題題問 6(p.125)

ここまで来たよ

変数変換 $X' = 2X + 4$

変換前 X, 変換後 X'

$$X \sim U(0,3)$$

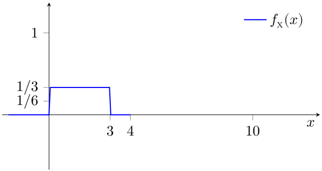
$X = \frac{X'-4}{2}$, 　$X' = 2X + 4$, 2 倍して 4 平行移動

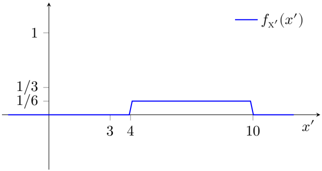
$$X' \sim U(4,10) \text{ 一様分布のまま!}$$

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0 \le x \le 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{X'}}(x') = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & (0 \le \frac{x'-4}{2} \le 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6} & (4 \le x' \le 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$





x	0	3
x'	4	10

復習

変換前 X, 変換後 $X' = Y = aX + b$.

命題 ($Y = aX + b$ の母平均値と母分散)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] =& \mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b \\
\mathrm{Var}(Y) =& \mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X) \\
\mathrm{Var}(Y)^{1/2} =& \mathrm{Var}(aX + b)^{1/2} = |a| \mathrm{Var}(X)^{1/2}
\end{aligned}
$$

これを使って，Y の母平均値母分散求められる？

母期待値の 2 つの計算方法

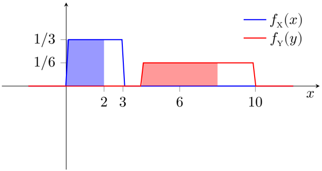
変換前 $X \sim U(0,3)$
計算方法 1 一様分布だから…
$\mathrm{E}[X] = \frac{0+3}{2}$
$\mathrm{Var}(X) = \frac{(3-0)^2}{12}$.

変換後 $Y = 2X + 4$
計算方法 1 変換後も一様分布になるから…$Y = 2X + 4$, 2 倍して 4 平行移動.
$Y \sim U(4,10)$
$\mathrm{E}[Y] = \frac{4+10}{2} = 7$
$\mathrm{Var}(Y) = \frac{(10-4)^2}{12} = 3$.
計算方法 2 ぜんぶ X の母期待値で書き直す
$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[2X + 4] = 2\mathrm{E}[X] + 4 = 7$.
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X + 4) = 2^2\mathrm{Var}(X) = 3$.

確率の計算方法

$P(X \leq 2) = ?$
変換前 $X \sim U(0,3)$
計算方法 1 一様分布だから…
$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

x	0	2	3
y	4	8	10



$P(Y \leq 8) = ?$
変換後 $Y = 2X + 4$
計算方法 1 変換後も一様分布になるから…$Y = 2X + 4$, $Y \sim U(4, 10)$
$P(Y \leq 8) = \int_{-\infty}^{8} f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_4^8 \frac{1}{6}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$.
計算方法 2 X の確率で書き直す
$P(Y \leq 8) = P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(x)\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

ここまで来たよ

3. 累積分布関数・分位数・指数分布・幾何分布

4. 連続型一様分布・確率変数の標準化
   - グラフの平行移動拡大縮小・確率分布の位置と広がり
   - 連続型一様分布
   - 確率変数の変数変換
   - 確率変数の標準化

確率変数の標準化 久保川 統計学入門 p.120

定義 (標準化された確率変数)

確率変数 Z が, $\mathrm{E}[Z] = 0, \mathrm{Var}(Z) = 1^2$ を満たすとき, Z は標準化された確率変数という.

任意の確率変数 X は, 1 次式で，標準化された確率変数に変換できる．
このとき，確率密度関数のグラフは，拡大，移動しただけで，形は同じ．

定義 (確率変数の標準化 久保川 統計学入門 p.120)

任意の確率変数 X に対して, $\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{Var}(X), \sigma > 0$ とする.
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準化された確率変数.「Z は X を標準化した確率変数」という.

$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[\frac{X-\mu}{\sigma}] = \boxed{0}$,
$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\frac{X-\mu}{\sigma})d = \boxed{1}$.

L04-Q3

連続型一様分布の標準化

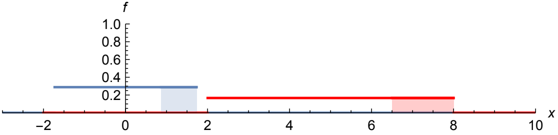
$X \sim U(2,8)$ を標準化しよう.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (2 \le x \le 8) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = 5, \mathrm{Var}(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$ より， $Z = \frac{X-5}{\sqrt{3}}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & (-\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

標準連続型一様分布 $Z \sim U(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$. 確率密度関数 $u(x; 0, \sqrt{3})$.



x	2	8
z	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$

確率変数の標準化とは

確率密度関数 $f_Y(x)$ を横方向に拡大縮小して '幅' 1 にする（副産物として縦にも拡大縮小する），平行移動して平均値 '重心' の位置を 0 にすること

逆に，標準化された 変換前 Z から 変換後 $X = aZ + b$ を考えると，
$\mathrm{E}[X] = b$, $\mathrm{V}[X] = a^2$.

命題

標準化された連続型一様分布 $Z \sim U(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ から，$X = aZ + b$ で，すべての連続型一様分布 $X \sim U(c, d)$ を作れる．

L04-Q4

Quiz(連続型一様分布)

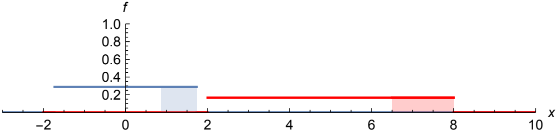
連続型確率変数 $Z \sim U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ に対して, $X = \sqrt{3}Z + 5$ を考える.

1. X の確率密度関数 $f_X(x)$ とそのグラフを答えよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{Var}(X)$ を求めよう.

それぞれ 2 つの方法で.

確率変数の変数変換 $X = aZ + b$ の意味

変換前 $X \sim U(0,3)$, 変換後 $Y = 2X + 4 \sim U(4,10)$ の話を,
変換前 $Z \sim U(-\sqrt{d}, +\sqrt{3})$, 変換後 $X = aZ + b$ でリプレイ.
一般に確率変数 X の確率密度関数のグラフは, Z のものを横に a 倍, 横に b 平行移動, (縦に $1/a$ 倍)
左 $Z \sim U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 右 $X = aZ + b = \sqrt{3}Z + 5 \sim U(2,8)$ の確率密度関数



$$f_X(x) = \frac{1}{a} \times f_Z\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \times \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \left(-\sqrt{3} \le \frac{x-b}{a} \le +\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \left(-a\sqrt{3} + b \le x < +a\sqrt{3} + b\right) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

対応する確率=塗った箇所の面積は同じ

$P(\frac{13}{2} < X \le 8) = P(\frac{\frac{13}{2}-5}{\sqrt{3}} < Z \le \frac{8-5}{\sqrt{3}})$.

z	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
x	2	$\frac{13}{2}$	8