正規分布

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L05(2025-05-19 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-27 Tue 07:34 JST hig"

今日の目標

- 正規分布の確率密度関数, グラフを書ける．母期待値，確率，分位数を求められる． 久保川 統計学入門 §5.3.2

L04-Q1
Quiz 解答: 位置とスケールを持つ連続型確率変数

1. $q(x;0,s)$ は偶関数であることに注意すると，k 次のモーメントの被積分関数は，k が奇のとき奇関数で $\mathrm{E}[X^k]=0$.
   $k=2\ell$ が偶関数のとき，

$$\mathrm{E}[X^k]=\int_{-a}^{+a}x^k\tfrac{3}{4a}(1-(\tfrac{x}{a})^2)\mathrm{d}x=\frac{3}{4a}\cdot 2\int_0^a x^k(1-(\tfrac{x}{a})^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{2a}[\tfrac{1}{k+1}x^{k+1}-a^{-2}\tfrac{1}{k+3}x^{k+3}]_0^a$$
$$=\frac{3a^k}{(k+1)(k+3)}$$

2. $\mathrm{E}[X^1]=0$. $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X^1]^2=\frac{3}{15}a^2-0^2$. よって標準偏差は $\mathrm{Var}(X)=5^{-1/2}a\simeq 0.45a$.
3. $b\neq 0$ のとき，$\mathrm{E}[X^1]=b$, $\mathrm{E}[X^2]=\frac{1}{5}a^2+b^2$.

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = 5^{1/2}a^2, (\mathrm{Var}(X))^{1/2} = 5^{-1/2}a.$

L04-Q2

Quiz 解答: 連続型一様分布

1. $\mathrm{E}[X^k] = \frac{1}{d-c}\int_c^d x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\frac{d^{k+1}-c^{k+1}}{d-c} = \frac{1}{k+1}(d^k + d^{k-1}c + \cdots + c^k).$
2. $\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}.$
3. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$. $\mathrm{Var}(X)^{1/2} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}.$

L04-Q3

Quiz 解答: 連続型一様分布

1. $X \sim U(\sqrt{3}(-\sqrt{3})+5, \sqrt{3}(+\sqrt{3})+5)$，すなわち，$X \sim U(2,8)$. 関数とグラフ略.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{2+8}{2}$, または, $\mathrm{E}[X] = \sqrt{3}\mathrm{E}[Z] + 5 = \sqrt{3}\cdot 0 + 5.$
3. $\mathrm{Var}(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$, または, $\mathrm{Var}(X) = (\sqrt{3})^2\mathrm{Var}(Z) = 3\cdot 1.$

ここまで来たよ

標準正規分布 standard normal distribution $N(0,1^2)$ の性質

定義 (標準正規分布 $N(0,1^2)$ 久保川 統計学入門 式 (5.2))

次の確率密度関数 を持つ確率変数 Z を，標準正規分布 $N(0,1^2)$ にしたがうという．

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

累積分布関数

$$F_{\mathrm{Z}}(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(z')\mathrm{d}z'.$$

ϕ, Φ は f, F のギリシャ文字．あまりに有名分布なので専用文字を使う．
$\Phi(z)$ の積分は具体的に書けない．
Python で `scipy.stats.norm(loc=0,scale=1)`
Excel で`=norm.s.dist(z,FALSE)`

標準正規分布 $Z \sim N(0, 1^2)$ の確率密度関数と母期待値

$\phi(z)$ は偶関数（y 軸に関して対称），$|z| \to \pm\infty$ で z 軸に漸近．

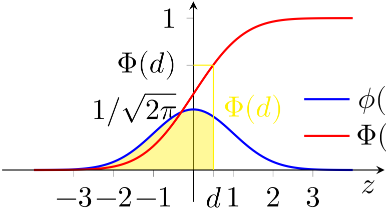
$\phi(0)\times$	$\phi(\pm1)/\phi(0)$	$\phi(\pm2)/\phi(0)$	$\phi(\pm3)/\phi(0)$	$\phi(\pm\infty)/\phi(0)$
$(2\pi)^{-1/2}\times$	$\mathrm{e}^{-1/2}$	$\mathrm{e}^{-4/2}$	$\mathrm{e}^{-9/2}$	$\mathrm{e}^{-\infty}$
$0.4\times$	0.6	0.14	0.01	$\to 0$

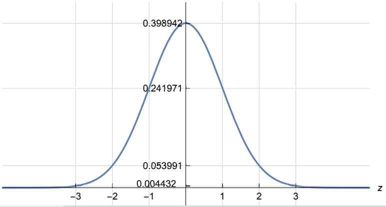
k 次のモーメント (k: 自然数)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z^{2k-1}] &= 0, \quad \text{奇関数} \\
\mathrm{E}[Z^{2k}] &= (2k-1)!!_{\text{部分積分}} \\
&= 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2k-1), \\
\mathrm{E}[Z^0] &= 1, \\
\mathrm{E}[Z] &= 0, \\
\mathrm{Var}(Z) &= 1.
\end{aligned}
$$

久保川 統計学入門 p.111 微積分 II

久保川 統計学入門 公式 5.17





たしかに, Z は標準化された確率変数.

標準正規分布の確率と $\Phi(z)$ の数値

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z \leq d) = \int_c^d \phi(z')\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z' = \Phi(d) - \Phi(c).$$

$\Phi(z)$, 分位数関数 確率統計 I(2025)L03 $\Phi^{-1}(q)$ は LearnMoodle Python による正規分布や 久保川 統計学入門 公式 5.9, 数値表 (p.290) から．数値表は $z \geq 0$ だけなので $z < 0$ は，$\Phi(-z) + \Phi(z) = 1$ を利用して求める． 高校 数学 C

```
from scipy import stats
rvz=stats.norm(loc=0,scale=1) # Z ~ N(0,1^2)
rvz.cdf(d) # Φ(d)
rvz.ppf(q) # Φ^{-1}(q)
```

z	$\Phi^{-1}(q)$	$-\infty$	$-z'$	0	$+\infty$
$\Phi(z)$	q	0	$1 - \Phi(z')$	$1/2$	1

上側分位点 $z_p = \Phi^{-1}(1-p)$ は $P(Z > z_p) = p$ となる点 久保川 統計学入門 公式 5.9

L05-Q1

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である.

1. 確率 $P(Z \leq 1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう. Python または表で小数として求めよう.
2. 確率 $P(-0.56 < Z \leq +1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう.
3. 確率 $P(-1.23 < Z \leq 0)$ を, 累積分布関数 $\Phi(z)$ ただし, $z > 0$ で表そう.
4. 確率 $P(Z > d) = 0.025$ となる d を累積分布関数 $\Phi(z)$ の逆関数で表そう. Python または表で求めよう.

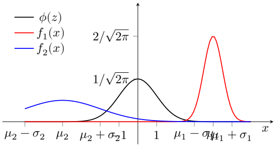
久保川 統計学入門 例題 5.12

ここまで来たよ

一般の正規分布 $N(b, a^2)$

$Z \sim N(0, 1^2)$ に対して，$X = aZ + b$ を考える． 久保川 統計学入門 公式 5.17

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^0] &= 1, \\
\mu = \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[aZ + b] = b, \\
\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(aZ + b) = a^2. \\
\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} &\rightsquigarrow f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}
\end{aligned}
$$



定義 (一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 久保川 統計学入門 式 (5.1))

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を，母平均値 μ, 母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ (normal distribution) にしたがうという．

$$
f_{\mathrm{X}}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.
$$

Python で `scipy.stats.norm(loc=`b`,scale=`a`)`.
$X \sim N(b, a^2)$ を標準化すると $Z \sim N(0, 1^2)$.

L05-Q2

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X が, 次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 3^2}}$$

1. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. $\mathrm{Var}(X)$ を求めよう.
3. $f(x)$ のグラフを, 標準正規分布の確率密度関数と重ねて描こう.

Python でも描いてみよう.

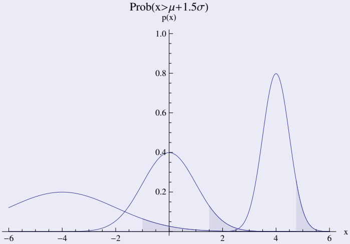
一般の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率

命題 (変数変換前後の確率は同じ 久保川 統計学入門 公式 5.10)

確率は変数変換，特に標準化 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ の前後で変わらない．

斜線部の面積はどれも同じ

$$\begin{aligned}P(c < X \leq d) &= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{d-\mu}{\sigma}\right)\\ &= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{d-\mu}{\sigma}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$



変数				下限	上限	母平均値	母分散
z	-2	0	2	$\frac{c-\mu}{\sigma}$	$\frac{d-\mu}{\sigma}$	0	1^2
x	$\mu - 2\sigma$	μ	$\mu + 2\sigma$	c	d	μ	σ^2

変数変換しても確率が同じことの別説明 (置換積分)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, 積分で $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\mathrm{d}z = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x$ とすると,

$$\begin{aligned} P(c < X \leq d) &= \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, \sigma \mathrm{d}z \\ &= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{d-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

L05-Q3

Quiz(正規分布の確率)

確率変数 $X \sim N(3, 2^2)$, $Z \sim N(0, 1^2)$ とする.

1. X, Z の確率密度関数の式を書こう. グラフを重ねて描こう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
3. 確率 $P(X > 5) = P(c < Z \leq d)$ となるように c,d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
4. 確率 $P(+1 < X \leq 7) = P(c \leq Z \leq d)$ となるように c,d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
5. 確率 $P(+3 < X \leq 9) = P(c \leq Z \leq d)$ となるように c,d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
6. 確率 $P(X \leq d) = 3/4$ となる d を, 確率 $P(Z \leq d') = 3/4$ となるような d' で表そう. また, Python や表を使って小数で求めよう.

久保川 統計学入門 例題 5.13