

多変数の確率変数

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L06(2025-05-26 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-26 Mon 08:22 JST hig"

今日の目標

- 同時分布, 周辺分布を説明できる 久保川 統計学入門 §6.1, §6.3
- 同時分布から周辺分布, 母期待値, 母共分散を求められる 久保川 統計学入門 §6.2
- 独立性を使って計算できる 久保川 統計学入門 §6.4



L05-Q1

Quiz 解答: 標準正規分布の確率

`rvz=stats.norm(loc=0,scale=1)` とする.

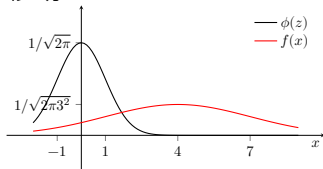
- ① $P(Z \leq 1.23) = \int_{-\infty}^{1.23} \phi(z) dz = \Phi(1.23) - \Phi(-\infty) = \Phi(1.23) - 0 = \text{rvz.cdf}(1.23) = 0.5708.$
- ② $P(-0.56 < Z \leq +1.23) = \int_{-0.56}^{1.23} \phi(z) dz = \Phi(1.23) - \Phi(-0.56) = \text{rvz.cdf}(1.23) - \text{rvz.cdf}(-0.56) = 0.6030.$
- ③ $\Phi(0) - \Phi(-1.23) = \frac{1}{2} - (1 - \Phi(1.23)) = \Phi(1.23) - \frac{1}{2}.$
- ④ $0.025 = P(Z > d) = P(d < Z < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi(d) = 1 - \Phi(d).$
よって, $\Phi(d) = 1 - 0.025.$
 $d = F^{-1}(1 - 0.025) = \text{rvz.ppf}(0.975) = 1.960.$

L05-Q2

Quiz 解答: 正規分布の確率

- ① $E[X] = 4.$

- ② $\text{Var}(X) = 3^2$.
- ③ $x = 4$ を対称軸とする，幅 3 くらいの正規分布の確率密度関数のグラフ．標準正規分布のグラフを，横に 3 倍，縦に $1/3$ 倍，右に 4 平行移動．

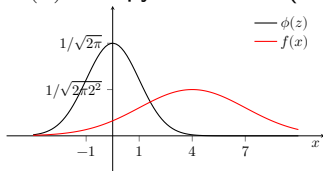


L05-Q3

Quiz 解答: 正規分布の確率

X を標準化すると， $Z = \frac{X-3}{2}$ ．

- ① $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2^2}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 2^2}}$, $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$. X, Z の累積分布関数をそれぞれ $F_X(x) = \text{scipy.stats.norm}(loc=2, scale=3).cdf(x)$, $\Phi(z) = \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).cdf(z)$ とかく.



- ② $E[X^2] = \text{Var}(X) + E[X]^2 = 2^2 + 3^2$.
- ③ $P(X \geq 5) = P(5 \leq X < +\infty) = P(\frac{5-3}{2} \leq \frac{X-3}{2} < +\infty) = P(\frac{5-3}{2} \leq Z < +\infty) = 1 - \Phi(1) = 1 - \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).cdf(1) = 0.15877$.
- ④ $P(1 \leq X \leq 7) = P(\frac{1-3}{2} \leq Z \leq \frac{7-3}{2}) = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.81859$.
- ⑤ $P(3 \leq X \leq 9) = P(\frac{3-3}{2} \leq Z \leq \frac{9-3}{2}) = \Phi(3) - \Phi(0) = \Phi(3) - \frac{1}{2}$.
- ⑥ $\frac{3}{4} = P(-\infty < X \leq d) = P(-\infty < Z \leq \frac{d-3}{2})$ より $d' = (d-3)/2$.
 $d' = \Phi^{-1}(\frac{3}{4}) = \text{scipy.stats.norm}(loc=0, scale=1).ppf(0.75)$.

ここまで来たよ

5 正規分布

6 多変数の確率変数

- 2 変数の確率分布
- 確率変数の独立性

2つの離散型確率変数の同時確率分布

高校 数学 B 久保川 統計学入門 §6.1

例 6枚のカードから無作為に1枚引く. ♡7 ♡8 ♡9 ◇8 ♠9 ♣9

2つの離散型確率変数の同時分布

$X =$ 数, $Y = 0$ (赤札), 1 (黒札) とすると (x, y) を得る確率は2変数の確率関数で書ける. 同時分布, 結合分布, joint distribution という.

コンマ前が X , 後が Y の値. 明示のため $p_{XY}(x, y)$ と書くことも. P (条件) 型の表記で $P(X = x, Y = y)$ とも. 表で書いた方がまし. ここでは, 「他」は省略.

表の縦軸横軸に意味なし. ラベル X, Y をよく見て.

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ((x, y) = (8, 0)) \\ \frac{1}{6} & ((x, y) = (9, 0)) \\ \frac{1}{3} & ((x, y) = (9, 1)) \\ \frac{1}{6} & ((x, y) = (7, 0)) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$y \backslash x$	7	8	9
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	0	0	$\frac{1}{3}$

今まで時々見た、「 $X = 2Y + 7$ 」のような式は、同時分布が次の形であることを意味する。

$y \backslash x$	7	8	9
0	p	0	0
1	0	0	$1 - p$

定義 (同時分布の確率 久保川 統計学入門 §6.1)

条件 $a < X \leq b$ かつ $c < Y \leq d$ の成り立つ確率は、

$$P(a < X \leq b \text{ かつ } c < Y \leq d) = \sum_{a < x \leq b} \sum_{c < y \leq d} p(x, y)$$

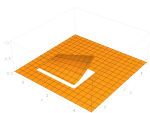
定義 (同時分布の母期待値 久保川 統計学入門 §6.2)

$$E[g(X, Y)] \stackrel{\text{定義}}{=} \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} g(x, y) \cdot p(x, y)$$

多変数の連続型確率分布

2変数の同時確率密度関数 $f(x, y)$.

$f(x, y) \geq 0$, 大きいほど, その (x, y) が
「出やすい」



定義 (連続型同時分布の確率)

$$P(a < X \leq b \text{ かつ } c < Y \leq d) = \int_b^a \int_c^d f(x, y) \, dx dy$$

平面の領域上にある部分の体積

定義 (連続型同時分布の母期待値)

$$\text{連続型 } E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \cdot f(x, y) \, dx dy$$

L06-Q1

Quiz(多変数の確率変数の期待値)

2変数 X, Y の離散型確率分布を考える. 同時分布 $p(x, y)$ が下の表で与えられる.

$y \backslash x$	1	2	3
0	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{4}{12}$	0	$\frac{5}{12}$

- ① 母期待値 $E[2X^2 + e^Y]$ を求めよう.
- ② 確率 $P(XY \geq 2)$ を求めよう.
- ③ 周辺分布 $p_X(x), p_Y(y)$ を求めよう.

命題 (多変数の確率分布の母期待値の性質 高校 数学 B 久保川 統計学入門 §6.2)

$$E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y)] = E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)] \quad (6.1)$$

$$\text{特に } E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (6.2)$$

証明

$$\begin{aligned} E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y)] &= \sum_x \sum_y (g_1(x, y) + g_2(x, y))p(x, y) \\ &= E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)]. \end{aligned}$$

周辺分布 久保川 統計学入門 §6.1

定義 (確率変数の周辺分布)

同時分布 $p(x, y)$ に対して,
 X の周辺分布 $p_X(x)$, Y の周辺分布 $p_Y(y)$ は,

$$\text{離散型 } p_X(x) = p(x, \bullet) = \sum_y p(x, y), \quad p_Y(y) = p(\bullet, y) = \sum_x p(x, y)$$

$$\text{連続型 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx$$

要するに 一方を無視した分布. 小計.

$y \backslash x$	7	8	9	計
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	
1	0	0	$\frac{1}{3}$	
計				

命題 (X だけ, Y だけの関数の母期待値)

x だけ, y だけの関数の母期待値は,
下の左辺= 同時分布 で計算しても
下の右辺= 周辺分布 で計算しても
同じ結果.

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_x \sum_y g(x) \cdot p(x, y) = \sum_x g(x) \sum_y p(x, y) = \sum_x g(x) \cdot p_X(x) \\ E[g(Y)] &= \sum_y \sum_x g(y) \cdot p(x, y) = \sum_y g(y) \sum_x p(x, y) = \sum_y g(y) \cdot p_Y(y) \end{aligned}$$

L06-Q2

Quiz

さっきの問で

- ① 周辺分布を求めよう.
- ② 周辺分布から $E[2X^2 + e^Y]$ を求めよう.
- ③ 母分散 $\text{Var}(X)$ を求めよう.

母共分散 高校 数学 C 久保川 統計学入門 §6.2

定義 (母共分散 covariance 久保川 統計学入門 §6.2)

X, Y が確率変数で, $\mu_X = E[X], \mu_Y = E[Y]$ とおいたとき,

$$\begin{aligned} \text{母共分散 Cov}(X, Y) &\stackrel{\text{定義}}{=} E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]. \\ &= \dots = E[X \times Y] - E[X] \times E[Y] \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)(X - \mu_X)] = E[X^2] - E[X]E[X].$$

$$\text{Var}(X) = \text{Cov}(X, X).$$

L06-Q3

母共分散

さっきの間で

- 1 母期待値 $E[XY]$ を求めよう.
- 2 母共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよう.

2変数の確率分布の母期待値のよくある間違い

$$E[g(X, Y)] \neq g(E[X], E[Y])$$

だって, $\sin(\log_x y) \neq \log_{\sin x}(\sin y)$ じゃん.

特に $E[X \times Y] \neq E[X] \times E[Y]$. \times を, $+$ と区別しよう.

2変数の確率分布の母分散のよくある間違い

$$\text{Var}(X + Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

母分散を, 母期待値と区別しよう.

ここまで来たよ

5 正規分布

6 多変数の確率変数

- 2変数の確率分布
- 確率変数の独立性

確率変数の独立性 高校 数学 C 久保川 統計学入門 §6.3

定義 (事象の独立性 久保川 統計学入門 定義 3.11)

事象 A, B が独立 (independent) とは次が成立すること.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

例: A =赤のサイコロの目が 1, B =白のサイコロの目が 1

定義 (確率変数の独立性 久保川 統計学入門 定義 6.9)

確率変数 X, Y が独立 (independent) とは次が成立すること.

$$p(x, y) = p_X(x) \times p_Y(y)$$

X, Y が独立とは, 直観的に

- 同時分布が, 周辺分布 **だけから (積で) 決まっちゃうこと**
- すべての行 (周辺分布も) がベクトルとして平行. すべての列 (周辺分布も) がベクトルとして平行
- X, Y が互いに **「無関係」** であること

独立である例

$y \setminus x$	0	1
10	4/9	2/9
11	2/9	1/9

 $=$

$y \setminus x$	$p_X(0)$	$p_X(1)$
$p_Y(10)$	$p_X(0)p_Y(10)$	$p_X(1)p_Y(10)$
$p_Y(11)$	$p_X(0)p_Y(11)$	$p_X(1)p_Y(11)$

例 赤白のサイコロを各 1 個振って, $X =$ 赤の目, $Y =$ 白の目.

例 下のカードから引いて, $X =$ 色, $Y =$ 数.

♥8 ♦8 ♦9

♠8 ♣8 ♣9

L06-Q4

Quiz(離散型確率変数の独立性)

独立な離散型確率変数 X, Y がある. 同時分布 $p(x, y)$ は次の表で与えられる. 空欄の確率を求めよう.

$y \setminus x$	3	4	計
13			$\frac{2}{7}$
14			
計	$\frac{7}{10}$		

命題 (復習: X, Y が独立でなくても成立する性質 久保川 統計学入門 §6.2)

$$E[g_1(X, Y) + g_2(X, Y)] = E[g_1(X, Y)] + E[g_2(X, Y)] \quad (6.3)$$

$$\text{特に } E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (6.4)$$

$$E[g_1(X) \times g_2(Y)] \neq E[g_1(X)] \times E[g_2(Y)] \quad (6.5)$$

$$\text{母共分散 } \text{Cov}(X, Y) \stackrel{\text{定義}}{=} E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (6.6)$$

$$= E[X \times Y] - E[X] \times E[Y] \quad (6.7)$$

L06-Q5

Quiz(2次元の独立でない確率変数の母期待値)

確率変数 X, Y について, $E[X] = 3, E[X^2] = 16, E[Y] = 10, E[Y^2] = 102, E[XY] = 25$ が成立する. 次の量を求めよう.

- ① $E[(X + 2)(Y + 3)]$
- ② $\text{Cov}(X, Y)$

命題 (X, Y が独立のときに追加で成立する性質 久保川 統計学入門 公式 6.13)

$g(X, Y) = g_1(X) \times g_2(Y)$ と因数分解されるとき

$$E[g(X, Y)] = E[g_1(X) \times g_2(Y)] = E[g_1(X)] \times E[g_2(Y)] \quad (6.8)$$

$$\text{特に } E[X \times Y] = E[X] \times E[Y] \quad (6.9)$$

$$0 = \text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \times E[Y] \quad (6.10)$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \quad (6.11)$$

$$\text{Var}(aX + bY + c) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) \quad (6.12)$$

$g_1(X)$ には Y が, $g_2(Y)$ には X が含まれない. こう書いたらそういう意味.

$\text{Cov}(,)$ は「独立でない度」ただし, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ は独立の

必要条件 (だが **十分条件** ではない) 久保川 統計学入門 公式 6.14

一部の証明連続型で書くけど, $\int \rightarrow \sum$ で離散型でも同様.

$$\begin{aligned} E[g_1(X) \cdot g_2(Y)] &= \iint g_1(x)g_2(y) \cdot f(x,y) dy dx \\ &\stackrel{\text{独立}}{=} \iint g_1(x)g_2(y) \cdot f_X(x) \times f_Y(y) dy dx \\ &= \int g_1(x)f_X(x) \left(\int g_2(y) \cdot f_Y(y) dy \right) dx \\ &= E[g_1(X)] \times E[g_2(Y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - E[X + Y]^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - (E[X]^2 + 2E[X]E[Y] + E[Y]^2) \\ &= \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \\ &= \text{Var}(X) + 0 + \text{Var}(Y). \end{aligned}$$

L06-Q6

Quiz(独立な確率変数の母期待値)

独立な確率変数 X, Y を考える.

$E[X] = 2, E[Y] = 3, \text{Var}(X) = 5, \text{Var}(Y) = 11$ である.

- ① 母期待値 $E[XY]$ を求めよう.
- ② 母共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ を求めよう.
- ③ $E[(-2X + 3Y)(X + 5Y)]$ を求めよう.
- ④ $\text{Var}(-2X + 3Y)$ を求めよう.