統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L13(2025-07-14 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-15 Tue 07:00 JST hig"

今日の目標

- 統計的仮説検定を説明できる 久保川 統計学入門 SS9.1,9.2
- 母平均値の両側 t 検定ができる 久保川 統計学入門 §9.4.1

L12-Q1

Quiz 解答:t 分布の確率と $t_{k,\alpha}$

1. $\Phi^{-1}(1-0.025) = \mathsf{ppf}(1-0.025) = z_{0.025} = 1.960.$
2. 標準正規分布の確率密度関数は偶関数なので,
   $\Phi^{-1}(0.025) = \mathsf{ppf}(0.025) = z_{1-0.025} = -z_{0.025} = -1.960.$
3. $F_{\mathrm{t}}^{-1}(1-0.025) = \mathsf{ppf}(1-0.025) = t_{40,0.025} = 2.021.$
4. t 分布の確率密度関数は偶関数なので,
   $F_{\mathrm{t}}^{-1}(0.025) = \mathsf{ppf}(1-0.025) = t_{40,1-0.025} = -t_{40,0.025} = -2.021.$

L12-Q2

Quiz 解答: 母平均値の区間推定 (母分散未知)

1. 重さの標本平均値は $\overline{X} = 50\mathrm{g}$. 不偏標本分散は $V^2 = \frac{1}{4-1} \cdot 14\mathrm{g}^2$.

$$\begin{aligned} 50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(1-0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} <& \mu < 50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(0.05/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\ 50 - t_{3,0.05/2} \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} <& \mu < 50 + t_{3,0.05/2} \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\ 50 - 3.182 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} <& \mu < 50 + 3.182 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\ 46.563 <& \mu < 53.437 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(1-0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} <& \mu < 50 - F_{\mathrm{t}}^{-1}(0.01/2) \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\ 50 - t_{3,0.01/2} \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} <& \mu < 50 + t_{3,0.01/2} \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\ 50 - 5.841 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} <& \mu < 50 + 5.841 \times \sqrt{\frac{14/3}{4}} \\ 43.691 <& \mu < 56.309 \end{aligned}$$

ここまで来たよ

12 母平均値の区間推定・線形回帰モデル

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

推定 (estimation) と検定 (test) 久保川 統計学入門 §9.1

点推定 μ は値 xx と推定 久保川 統計学入門 §7.2

区間推定 μ は値 yy と値 zz の間と推定 (信頼係数 $1-\alpha$ で) 久保川 統計学入門 §8

仮説検定 μ は値 xx と差がある，と, (とても確信のある $(1-\alpha)$ ときだけ) 断言 (有意水準 α で) =見逃し多いけど発色したら正しい血痕試験紙 久保川 統計学入門 §9

あるドーナツ製造機は, 重さ X(確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, 違う感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

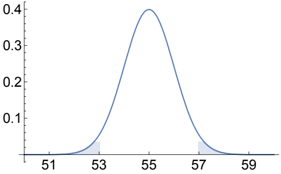
ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は… 自分の方法は優れていると言いたい.

検定はだいたいこんな考え方 久保川 統計学入門 §9.2

確率変数 X は, 正規分布 $N(55, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, $\mu = 55$ (帰無仮説) が本当なのか疑っている. というより, 本当でないと言いたい
サイズ 4 の標本を抽出したところ,

$$54, 57, 57, 60$$

だった. → 標本平均値 $\overline{X} = \frac{1}{4}(X_1 + \cdots + X_4) = 57.$
$\overline{X} \sim N(55, 2^2/4).$
確率 α(=有意水準) でしか起きないくらいまれな, 帰無仮説から離れたことが起きたら (検定統計量 $\overline{X}$ の実現値が棄却域に含まれるなら) おかしいと判定する (帰無仮説を棄却する)
棄却域は, $\overline{X}$ の数直線上の領域のこと (不等式で指定される), その棄却域とそれ以外の領域 (受容域) との境い目の値を棄却限界という.



帰無仮説と対立仮説 久保川 統計学入門 §9.2

母集団，母ナントカに対する仮説（標本に対するものではない）

- H_0: 帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 =「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1: 対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 =「真の母平均値 μ は 55g でない」

検定 (test)=統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)
心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズを大きくできないことが多い．小さくても Yes/No の結論を出す, 科学業界で合意された方法.

帰無仮説を棄却する reject
検定統計量の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (棄却域にはいったら) 帰無仮説 (=背理法の仮説) が偽, 対立仮説が真と結論する (試験紙が発色した)
帰無仮説を受容する accept 「帰無仮説を棄却できない」
実験失敗 (背理法始めたけど矛盾導けなかった). 何も言えない (発色しな

ここまで来たよ

12 母平均値の区間推定・線形回帰モデル

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

L13-Q1

Quiz(母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg は，正規分布にしたがうことがわかっている．母平均値は 55g だと言われていたが疑っている．きょう 5 個製造したところ，下のようだった．
50g, 50g, 51g, 46g, 48g.
ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg の母平均値が 55g と異なるかどうか，有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう．

一般の統計的仮説検定の，レポートや論文での書き方

久保川 統計学入門 p.189

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

統計的仮説検定の一般的手順

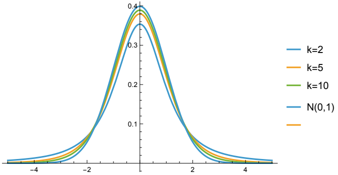
1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」「対立仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は …分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量 Y の実現値は $y = \cdots$ である」
5. （棄却限界を計算して)「棄却域は…」
6. 「…より帰無仮説を棄却する/受容する」「よって（問に即した対立仮説の内容）と結論する/とは結論できない」

(6)「結論」の基本形は，(対立仮説) と結論する/結論できない，です．問と対立仮説の間に翻訳がはさまってる（例：変化した）ときは，問に対する答にします．単に (対立仮説) というだけでなく，「結論」というワードを入れるのは，「心から信じてるわけではないが，統計的仮説検定の手順に従うとこうなる」というニュアンスをいれるため

復習：t 分布 確率統計 I(2025)L12

定義 (t 分布 久保川 統計学入門 定義 8.3)

$Z \sim N(0,1^2)$, $W \sim \chi_k^2$, Z と W が独立,
のとき連続型確率変数 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{W/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布 t_k という.



命題 (T の分布 久保川 統計学入門 公式 8.4)

母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から, サイズ n の標本 $X_1,\cdots,X_n$ を取り出したとき,

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{V^2/n}}$$

は, 自由度 $n-1$ の Student の t 分布にしたがう.

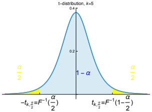
正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定 久保川 統計学入門 公式 9.4

母平均値の両側 t 検定 久保川 統計学入門

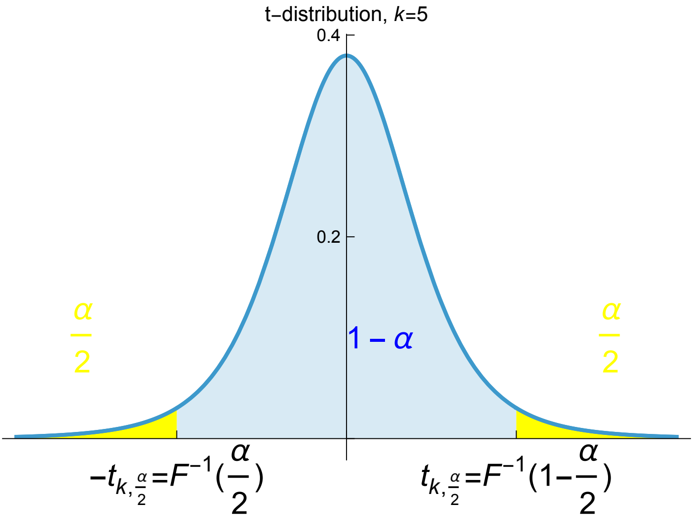
前提 母集団が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう，μ, σ^2 は不明.

1. 有意水準 α で，正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu \neq \mu_0$ とする.
3. 帰無仮説のもとで, 標本サイズ n の標本から計算する検定統計量 $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{V^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
4. 統計検定量 T の実現値 t を標本平均値 $\overline{X}$, 不偏標本分散 V^2 の実現値から計算すると $t = \cdots$.
5. 棄却限界は $C = F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$, 棄却域は $|t| > C$ である.
6. 実現値 t は棄却域に含まれる/含まれないので (結論) 帰無仮説を棄却する/受容する, (対立仮説) 母平均値は $\mu \neq \mu_0$ と結論する/できない.

棄却域は t 軸の部分集合 $(-\infty, -C) \cup (C, +\infty)$. 受容域は $[-C, +C]$. ここで C は，$P(t \in \text{棄却域}) = \alpha$ であるように, $C = F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ と決めた.



t 分布では $F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = -F^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = t_{k,\frac{\alpha}{2}}$.


t–distribution, k=5
0.4
0.2
$\frac{\alpha}{2}$
$1-\alpha$
$\frac{\alpha}{2}$
$-t_{k,\frac{\alpha}{2}}=F^{-1}(\frac{\alpha}{2})$
$t_{k,\frac{\alpha}{2}}=F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

L13-Q1

Quiz 解答: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\mathrm{g}$ に等しい」すなわち「$\mu = 55$」とする. 対立仮説を「$\mu \neq 55$」とする.
3. サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を V^2 とするとき, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{V^2/5}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.
4. 検定統計量 T の実現値
$t = \frac{\bar{X}-55}{\sqrt{V^2/5}} = \cdots = \frac{49-55}{\sqrt{\frac{1}{5}\frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$

5. 棄却限界は
$F^{-1}(1-0.05/2) = t_{4,0.05/2}$ =`rvt.ppf(1-0.05/2)`$= 2.776$ より，棄却域は $|t| > 2.776$.
棄却域は,「$t < F^{-1}(0.05/2)$ または $F^{-1}(1-0.05/2) < t$」とも書ける.
6. $|-6.708| > 2.776$ であり, 実現値 t は棄却域に含まれるので, 帰無仮説を棄却する. ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する.

(注: 帰無仮説の棄却のことを, 業界用語「有意」significant で表現する人もいる. 検定は有意である, 母平均値 μ は 55g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

重さは負にならないし, 正規分布にしたがうというのはおかしな前提だが, ここは練習ってことで. 世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが, 数理の人はおかしさを認識できるように.

久保川 統計学入門 例題 9.5, 基本問題問 1,3(p.200)

L13-Q2

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには, ドーナツ販売開始前には, 9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた. ドーナツ販売開始後の 4 日間, 来店客数は次の通りだった. $204, 208, 188, 200$
来店者数は正規分布にしたがうと考える. ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか? 有意水準 0.05 で考える.

母平均値・母分散・母比率・適合度・独立性の検定

	両側	片側
母平均値	**両側 t 検定** 久保川 統計学入門 公式 9.4	**片側 t 検定** 久保川 統計学入門 公式 9.4
母分散	**両側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 9.7	**片側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 9.7
母比率	**両側二項検定** 久保川 統計学入門 (9.7)	**片側二項検定** 久保川 統計学入門 例題 9.10
適合度	NA	**片側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 11.2
独立性	NA	**片側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 11.4
母平均値の差	**両側 t 検定** 対応なし (等分散, Welch) 久保川 統計学入門 公式 10.7, あり 久保川 統計学入門 公式 10.5	**片側 t 検定** 対応なし (等分散, Welch), あり
母分散の比	**両側 F 検定** 久保川 統計学入門 公式 10.3	**片側 F 検定**

ふつうじゃない trial L13 非参照テストではなく, 2025-07-28 月 20:00 までにアップロードするレポート，したがって，2025-07-21 月 1 には trial はない．

- 練習問題 L13-01, L13-02 の両方に合格（今回に限って満点でなくても合格することがある）すると, 個人別レポート問題の取得や提出が可能になる.
- 趣旨: 検定の長い文を (参照ありで) 書けることを確かめる必要. 非参照や短時間のテストで確認することが難しい.