片側検定・母比率の検定

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L14(2025-07-21 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-23 Wed 07:46 JST hig"

今日の目標

- 母比率の片側検定ができる 久保川 統計学入門 §9.5
- p 値を使った検定ができる 久保川 統計学入門 §9.3
- 第 1 種, 第 2 種の過誤, 有意水準と検出力を説明できる 久保川 統計学入門 §9.3

統計的仮説検定の「結論」は，基本形は，(対立仮説) と結論する/結論できない，です．問と対立仮説の間に翻訳がはさまってる（例：変化した）ときは，問に対する答にします．単に (対立仮説) というだけでなく，「結論」というワードを入れるのは，「心から信じてるわけではないが，統計的仮説検定の手順に従うとこうなる」というニュアンスをいれるためです．

L13-Q1

解答は 確率統計 I(2025)L13 に掲載

L13-Q2

Quiz 解答: 正規分布の母平均値に関する t 検定

1. 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
2. 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」, すなわち $\mu = 196$ とする. 対立仮説を $\mu \neq 196$ とする.

3. サイズ $n = 4$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を V^2 とすると, 検定統計量
$$T = \frac{\bar{X} - 196}{\sqrt{V^2/4}}$$
は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $4 - 1$ の t 分布に従う.
4. この標本の実現値は $\bar{X} = 200, V^2 = \frac{224}{4-1} = 74.7$. よって, 検定統計量の実現値は, $t = \frac{200-196}{\sqrt{\frac{224}{3}/4}} = 0.92582$.
5. 棄却限界は $C = F^{-1}(0.975) = t_{3,0.05/2}$. 棄却域は $|t| > C$ すなわち, $|t| > 3.182$.
6. $|0.92582| < 3.182$ であり, 実現値は棄却域に含まれないので, 帰無仮説を受容する．来店客数の母平均値が変化したとは結論できない. (注: 検定は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, 有意な標本でないなど).

一般の統計的仮説検定の，レポートや論文での書き方

母集団を決める．母集団の分布タイプを仮定する．使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

1. 「有意水準 $\alpha = \cdots$ で」「…検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
2. 「帰無仮説を…とする」「対立仮説を…とする」
3. 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は $\cdots$分布にしたがう」
4. 「この標本に対してナントカ検定統計量 Y の実現値は $y = \cdots$ である」
5. （棄却限界を計算して)「棄却域は…」
6. 「…より帰無仮説を棄却する/受容する」「よって（問に即した対立仮説の内容）と結論する/とは結論できない」

母平均値・母分散・母比率・適合度・独立性の検定

	両側	片側
母平均値	**両側 t 検定** 久保川 統計学入門 公式 9.4	**片側 t 検定** 久保川 統計学入門 公式 9.4
母分散	**両側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 9.7	**片側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 9.7
母比率	**両側二項検定** 久保川 統計学入門 (9.7)	**片側二項検定** 久保川 統計学入門 例題 9.10
適合度	NA	**片側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 11.2
独立性	NA	**片側カイ二乗検定** 久保川 統計学入門 公式 11.4
母平均値の差	**両側 t 検定** 対応なし (等分散, Welch) 久保川 統計学入門 公式 10.7, あり 久保川 統計学入門 公式 10.5	**片側 t 検定** 対応なし (等分散, Welch), あり
母分散の比	**両側 F 検定** 久保川 統計学入門 公式 10.3	**片側 F 検定**

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

14 片側検定・母比率の検定

- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

母比率の検定 I

p と書いてた母比率, 二項分布の $Bin(n,p)$ の p を, 今日は r と書きます

例 (母比率の検定のアイデア 久保川 統計学入門 §9.1)

このマジック用コインは表の出る確率 (母比率)$r = 1/5$ だと言われているが, もっと表がでちゃう気がする.
50 回投げた (サイズ $n = 50$ のサンプル) ところ, 表 $X = 15$ 回表が出た.
こんな「稀な」ことが起きるってことは, そうに違いない!

$\rightsquigarrow$ これ, 統計的仮説検定として定式化できる考え方
前提 1 回投げたときの表 (1) 裏 (0) $X_i \sim Bin(1,r)$. (無限母集団はベルヌイ分布)
$Bin(1,r)$ のサイズ n のサンプルに対して合計 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ は
$X \sim Bin(n,r)$. (二項分布).
帰無仮説 $r = \frac{1}{5}$, 対立仮説 $r > \frac{1}{5}$.

母比率の検定 II

帰無仮説 (背理法の仮定) のもとで, $X = 15$ はとても稀 (矛盾) と言いたい. 確率統計 I(2025)L13

$$P(X = 15) = \frac{50!}{15!(50-15)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{15}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-15} = 0.0299 \quad \text{稀じゃん}$$

ちょっと待て. 特定の回数が出ることじたい稀. 上の確率は
$1/\text{場合の数} = 1/51 = 0.0196$ より大きい.
もっともらしい $50 \cdot \frac{1}{5} = 10$ 回だって稀じゃん?

$$P(X = 10) = \frac{50!}{10!(50-10)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{50-10} = 0.1398$$

これ $(X = 15)$ 以上に極端なことが起きる確率を考えよう.

$$P(15 \le X \le 50) = \sum_{k=15}^{50} P(X = k)$$

母比率の検定 III

36 個も加えるの? …計算機で直接計算する手もある正確確率検定
正規近似による計算 確率統計 I(2025)L08

$\mathrm{E}[X] = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10, \mathrm{Var}(X) = 50 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 8.$
サンプルサイズ 50 大と思うと，中心極限定理より，近似的に $X \sim N(10, 8)$. $Z = \frac{X-10}{\sqrt{8}} \sim N(0, 1^2)$.

$$
\begin{aligned}
P(15 \leq X) =& P\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}} \leq Z < +\infty\right) \\
=& \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}}\right) \\
=& 1 - \mathrm{cdf}\left(\frac{15-10}{\sqrt{8}}\right) = 1 - 0.96145 = 0.0385.
\end{aligned}
$$

確率統計 I(2024)L09

$P(X \geq 15) = 0.0385$ (これがあとで出てくる p 値) が稀と思うかは主観.
けんかにならないように, 計算し始める前に基準を決めておく. それが, 有意水準 $\alpha = 0.05$ or 0.01. そのときのぎりぎりの z が棄却限界，それより遠くが棄却域

母比率の検定 IV

上で出てきた Z は, 分子分母を $n = 50$ で割ると, 帰無仮説 $r = r_0 = \frac{1}{5}$, 標本比率の実現値 $\hat{r} = \frac{3}{5}$ により,

$$\frac{15-10}{\sqrt{8}} = \frac{\frac{15}{50} - \frac{10}{50}}{\sqrt{\frac{1}{50}\frac{1}{5}\frac{4}{5}}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot r_0 \cdot (1 - r_0)}}$$

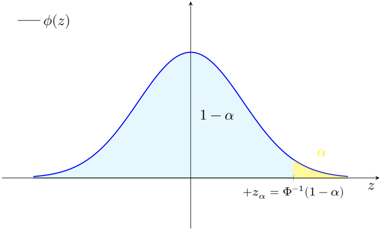
という, 母比率の区間推定の導出に似た形になる.
ただし, 平方根の中にあるのは帰無仮説の母比率 $r_0 = \frac{1}{5}$, 標本比率は $\hat{r}$.

久保川 統計学入門 公式 9.9+式 (9.7)

復習 確率統計 I(2025)L10

母比率 r は，ベルヌーイ分布 $Ber(r)$ の母平均値 r. 母分散は $r(1-r)$.
標本比率は標本平均値 $\overline{X} = \hat{r} = k/n$.

近似 1 サンプルサイズが大きいとき，中心極限定理により，標本比率は近似的に正規分布 $N(r, r(1-r)/n)$ に従う.



定義 (標準正規分布の z_α 久保川 統計学入門 公式 5.9,(8.5), 図 8.4 確率統計 I(2025)L10)

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき，上側確率 $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ となる点を z_α と定める.
Φ を累積分布関数，Φ^{-1} をその逆関数とするとき，
$P(+z_\alpha < Z < +\infty) = 1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$, $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$.

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

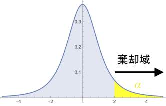
久保川 統計学入門 公式 9.9+式 (9.7)

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

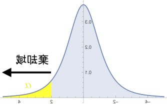
前提 $X \sim Bin(n, r)$.

1. 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) とする.
3. 帰無仮説のもとで，サイズ n の標本から計算する検定統計量 $Z = \frac{X - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき). $\hat{r} = \frac{X}{n}$: 標本比率.
4. 標本に対して検定統計量 Z の実現値 z は…
5. 棄却限界は $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ (or $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$) 棄却域は $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$ (or $z < \Phi^{-1}(\alpha)$).
6. 「(…) より帰無仮説を棄却する/受容する. よって母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) と結論する/できない」

上側片側



下側片側



L14-Q1(上側片側)

TA Prob and Sol: 母比率の片側検定

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている.
くじを 100 本ひいたところ, 15 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう.

略解

1. 有意水準 $\alpha = 0.05$ で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = \frac{1}{10}$, 対立仮説を母比率 $r > \frac{1}{10}$ とする.

3. 帰無仮説のもとで, 100 本中のあたりの回数 $X \sim Bin(100, \frac{1}{10})$. あたりの標本比率を $\hat{r}$ とすると, $Z = \frac{\hat{r}-\frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{10}(1-\frac{1}{10})}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,1^2)$ にしたがう.
4. この標本に対して $\hat{r} = \frac{15}{100}$ なので, 検定統計量の実現値 $z = \frac{5}{3} = 1.667$.
5. 棄却限界は $z_{0.05} = \Phi^{-1}(1-0.05) =$ scipy.stats.norm(loc=0,scale=1).ppf($1-0.05$) $= 1.645$. 棄却域は $z > z_{0.05}$
6. 実現値 z は棄却域に含まれる. 帰無仮説を棄却する. 母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する.

p 値による場合

5. p 値は $p = P(Z > \frac{5}{3}) = \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{5}{3}) =$ $1-$ scipy.stats.norm(loc=0,scale=1).cdf($\frac{5}{3}$) $= 0.0475$.

6. $0.0475 = p < \alpha = 0.05$ なので帰無仮説を棄却する．よって母比率 $r > \frac{1}{10}$ と結論する．

棄却域に含まれない場合．p 値が α より大きい場合．

6. 帰無仮説を受容する．母比率 $r > \frac{1}{10}$ とは結論できない.」

久保川 統計学入門 例題 9.11

L14-Q2 (下側片側)

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ (「あたり」と「はずれ」だけがある) は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより小さいのではないかと疑っている.
くじを 100 本ひいたところ, 5 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.01$ で母比率の検定を行おう.

久保川 統計学入門 問 1, 問 5(p.200)

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

14 片側検定・母比率の検定

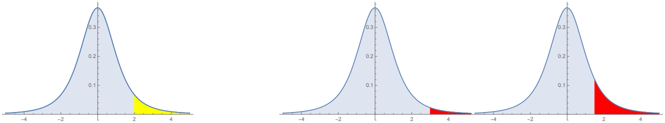
- 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率
- 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

p 値=有意確率による棄却する/しない判定 久保川 統計学入門 §9.3

検定の Step6 では, 検定統計量の実現値 z, t が極端かどうか判定している
$X = 15 \Leftrightarrow Z = \frac{15-10}{\sqrt{8}}$ が棄却域 (α で決まる) に入っているか?
$\Updownarrow$
p 値=有意確率 $P(X \geq 15) = P(z \geq \frac{15-30}{\sqrt{8}})$ が有意水準 α より小さいか?

標本の p 値 (p-value)=有意確率 久保川 統計学入門 (9.3)(9.4)

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本より極端な値をとる確率
$p < \alpha \Leftrightarrow$ 帰無仮説棄却



母比率の検定の上側片側検定のとき p 値 $= 1 - \Phi(z)$.
棄却域の考え方での棄却: $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$. $\Phi(z)$ は増加関数だから…
p 値の考え方での棄却: $\Phi(z) > 1 - \alpha$ つまり $p = 1 - \Phi(z) < \alpha$ だから…

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似) in p 値 久保川 統計学入門 §8.2

母比率の片側 (二項) 検定 (の正規近似)

前提 $X \sim Bin(n, r)$.

1. 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う.
2. 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) とする.
3. 帰無仮説のもとで，サイズ n の標本から計算する検定統計量 $Z = \frac{X - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき). $\hat{r} = \frac{X}{n}$: 標本比率.
4. 標本に対して検定統計量 Z の実現値 z は…
5. ~~棄却限界は $\Phi^{-1}(1-\alpha)$. 棄却域は $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$ (or $z < \Phi^{-1}(\alpha)$).~~ 実現値 z の p 値は $p = \Phi(\infty) - \Phi(z)$. (or $p = \Phi(z) - \Phi(-\infty)$)
6. 「$p < \alpha$ より帰無仮説を棄却する (受容する). よって母比率 $r > r_0$ (or $r < r_0$) と結論する/できない」

ここまで来たよ

13. 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
14. 片側検定・母比率の検定
    - 母比率の検定=二項検定 (の正規近似)
    - p 値=有意確率
    - 仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

仮説検定での第 1 種・第 2 種の過誤と混同行列

	帰無仮説を棄却, 有意である	帰無仮説を受容, 有意でない
対立仮説が成立 $\mu \neq \mu_0$	確率 $1-\beta$	第 2 種の過誤 確率 β
帰無仮説が成立 $\mu = \mu_0$	第 1 種の過誤 確率 α	確率 $1-\alpha$

α, β はどちらも小さくしたいが, 両立しない.

α はほぼゼロ ($\alpha = 0.01$ or 0.05) に固定して, その上で β をなるべく小さくするように試みる習慣.

検定とは, 発色 (検出) したら (まれな誤検出を除いて) ほぼ確かなだけど, 見逃すことはある異常検査薬のようなもの.

α 誤検出率, 有意水準, 危険率

β: 見逃し率 (検出力:$1-\beta$)

類似: 混同行列

機械学習

ふつうじゃない trial L13 非参照テストではなく, 2025-07-28 月 20:00 までにアップロードするレポート，したがって，2025-07-21 月 1 には trial はない.

- 練習問題 L13-01, L13-02 の両方に合格（今回に限って満点でなくても合格することがある）すると, 個人別レポート問題の取得や提出が可能になる.
- 趣旨: 検定の長い文を (参照ありで) 書けることを確かめる必要. 非参照や短時間のテストで確認することが難しい.

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト用途:Moodle 成績評価方法参照.
2025-08-04 月 09:15-10:15, 参照なし. 7-002. 事前の出欠連絡不要. 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし. Trial L01-08 の出題計画をあわせたもの. 要学生証, 個人別座席指定.
すべて持込不可
災害や交通機関などにより全学的に定期試験が中止・延期になるときは同様に中止・延期.
成績評価
考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2025-07-30 水までに提出.