# 離散型確率変数

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L01(2026-04-13 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-04-21 Tue 18:07 JST hig"

今日の目標

- 科目の目標/合格条件を説明できる, Moodle 使える
- 久保川 統計学入門 §4.1 離散型確率変数とは何か説明できる
- 久保川 統計学入門 §4.2 離散型確率変数の確率，母平均値, 母分散, 母期待値，累積分布関数が計算できる

## ここまで来たよ

1. はじめに
   - この授業どんなのり?
2. 離散型確率変数
   - 事象と確率
   - 離散型確率変数
   - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

## 学習目標

講義概要 → シラバス
現実世界の現象を理解し、数理モデルとの関係を明らかにするためには、観察・実験により取得したデータを整理・解析することが必要である。限ら れたデータから数理モデルのパラメタを推測する推測統計と、必要な確率論を説明する。
到達目標 → シラバス

- 確率論:1 変数、2 変数の離散型、連続型確率変数の期待値や確率の計算ができる → 1Q 各回の trial
- 推測統計: 実験・観察により取得したデータから数理モデルのパラメタを推測して、根拠とともに他者に説明ができる → 2Q 各回の trial

きょうは 1 変数離散型

# 確率統計 I を履修してはいけない理由

次のどれも響かない人は履修しないことを奨めます.

- データサイエンスプログラムの前提科目 (データ分析, 確率統計 I, 多変量解析及び実習, 機械学習 I,II, 確率統計 II,III, 確率モデル及び実習)
- 数学の教員免許の必修科目
  - 高校 数学 I(データの分析)=毎年センター試験に出題, 新課程高校 数学 A(場合の数と確率), 新課程高校 数学 C(確率分布と統計的推測)
  - 高校の新課程高校 数学 I に統計的仮説検定が来てる
- いま, データサイエンス, 統計が熱い!
- いま, 生成 AI が熱い! 線形代数と確率が必要
- 統計は科学技術の言葉 $\rightsquigarrow$ 数理卒は当然期待されてる
- 科目に合格したら統計検定 2 級の 6 合目くらいまで来た?

# こんなことに答えます

1. データ分析で伏線はりまくったけど, どこで回収するの? 推測統計 (確率統計)↔記述統計 (データ分析)
2. (ゲーム運営) このガチャの確率の設定で, プレイヤーのレベルってどのくらいあがる?
3. YouTube から猫の動画を見つけるアルゴリズム, こう改良して, 100 個の入力画像で試したら, 判定精度が 3 個分あがった. これたまたま? 10000 個でやり直すべき?
4. 秋元 P は日向坂に櫻坂より身長高いメンバーをいれてる説を唱えたけどみんな信じてくれない…どうやって説得する?

(再掲) 到達目標 → シラバス

- 確率論:1 変数、2 変数の離散型、連続型確率変数の期待値や確率の計算ができる → 1Q 各回の trial
- 推測統計: 実験・観察により取得したデータから数理モデルのパラメタを推測して、根拠とともに他者に説明ができる → 2Q 各回の trial

# ピーナツカウント (成績計算) ののり

成績計算
ムズくないけどだるい科目です
科目の成績 100 ピーナツは

- 25 ピーナツ: 平常点 毎週の Web の練習問題, チーム課題, 授業時間内の活動, それほどたいへんじゃないレポートなど
- 75 ピーナツ: 小テスト 毎週 9:15 からの trial=5 ピーナツ x15 回

75 ピーナツ: 小テストのうち, 1Q(40) 2Q(35) どちらかが, 50%未満のときは無条件に科目を不合格とします (2 つの到達目標のうち 1 個しか達成していないから)

欠席届毎回出席を前提に進めます．欠席に事前連絡は不要．やむを得ず欠席して, ピーナツ的に考慮されたい場合は事後 2 週間以内に LearnMoodle　欠席届から届けてください

# 週サイクルののり

説明—時間内 (チーム) 課題—週内 Web 練習問題—(翌週)trial
今週を例に.

- 2026-04-13 月 対面授業 来週の trial を予告, チーム課題で練習
- 2026-04-14 火 9:15 ごろ –2026-04-20 月 09:15 LearnMoodle 練習問題
- 2026-04-16 木昼 オフィスアワー 1-539
- 2025-04-20 月 09:15(10 分間くらい) trial 非参照 非相談

**数学系の 2 年次以上科目は週 1 コマしかない!**

(週 1 コマ相当) 自分で演習問題を見つけて, 自分で解き, わからない点があったら自分から相談したり質問したりする

# 授業ののり (教科書やその他の準備)

https://hig3.net

- → 確率統計 I (配布資料).
- → LearnMoodle https://learn.hig3.net (Google でログイン) → 確率統計 I
    - → Teams

教科書 必須です. 久保川 統計学入門 §3.2 は 3 章 2 節ということ.
久保川達也 公式と例題で学ぶ 統計学入門, 共立出版 (2024)
演習解答・正誤表

https://hig3.net

§1,2: 記述統計. データ分析 相当.
§3.1, §3.2: 大事だけど今日圧縮してやります
§3.3, §3.4: 必要な時に戻ってきます
§4–9,12.1,12.2: とばすところもあるけどこの科目でカバー

**座席指定**
チーム別エリア座席指定．チームはプロジェクト演習と同じはず．

**ノート**
教科書や紙配布資料に書き込む + 自分で問題を解いた過程をノートやルーズリーフに残す，ことをお奨めします．

**ノート PC** Google Colab や動画を使います．ノート PC とイヤフォンを毎回持参していただきます．

**担当者ののり**

- なまえ: 樋口さぶろお
- へや: 1-513（左に移りました）
- Web ページ. `https://hig3.net`
- オフィスアワー 前木昼, 1-539 or Teams chat a00010

**相談できるところ**

- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538), 昼休みはだいたい大学院生常駐．数理 TM-Math ラウンジ ch on Teams.

# ここまで来たよ

# 事象と確率 久保川 統計学入門 §3.1

確率は集合位相の言葉で語られる. 集合位相 (2 年後期)

定義

全事象 $\Omega$ =(トランプのカード全体の集合)

事象 $A = \{x \in \Omega | a(x)\} \subset \Omega$ (例えば赤のカード全体からなる部分集合)

基本事象 $x \in \Omega$ のとき, $A = \{x\}$ のような元 1 個の集合 ($\{\heartsuit 1\}$)

試行 基本事象のひとつを選ぶこと (トランプからカード 1 枚引くこと)

全事象 $\Omega \subset \Omega$

空事象 $\emptyset \subset \Omega$

補事象 $A^{\mathrm{c}} = \Omega \setminus A$. $A$ が起きないという事象.

積事象 $A \cap B$ 'かつ'.

和事象 $A \cup B$ 'または'.

排反事象「$A, B$ が排反事象」$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. 同時に起きない.

### 定義 (確率の公理 久保川 統計学入門 定義 3.1)

確率 $P$ は，$\Omega$ の部分集合を，$0$ 以上 $1$ 以下の実数に対応させる関数で，次をみたす．

- (P1) すべての $A \subset \Omega$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$.
- (P2) $P(\Omega) = 1$.
- (P3) $A \cap B = \emptyset$ (排反) なら，$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

「事象 $A$ の確率」$=P(A)$ を，$P$(条件) のように書くことがある．
全事象 $\Omega =$(トランプのカード全体の集合) のとき,

- (♡がでるという事象の確率) $= P(\{\heartsuit 1, \dots, \heartsuit K\}) = P($カードが♡$)$
- (♡1がでるという事象の確率) $= P(\{\heartsuit 1\}) = P($カードが♡1$)$
- (黒札がでるという事象の確率) $= P(\{\clubsuit 1, \dots, \clubsuit K, \spadesuit 1, \dots, \spadesuit K\}) = P($カードが黒札$)$

# 事象と確率

公理から導ける公式

全事象 $\Omega \subset \Omega$. $P(\Omega) = 1$.

空事象 $\emptyset \subset \Omega$. $P(\emptyset) = 0$.

補事象 $A^c = \Omega \setminus A$.　$A$ が起きないという事象. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

積事象 $A \cap B$ 'かつ'.

和事象 $A \cup B$ 'または'.

排反事象「$A, B$ が排反事象」$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. 同時に起きない. $A, B$ が排反事象ならば, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**命題 (同様に確からしいときの確率**高校 数学 A 久保川 統計学入門 公式 3.4**)**

$\Omega$ が有限集合で, 基本事象が同様に確からしい, なら, 確率は

$$P(A) = \frac{A \text{ の要素の個数}}{\Omega \text{ の要素の個数}} = \frac{\text{場合の数}}{\text{すべての場合の数}}$$

# 確率変数

コイン投げ $\Omega = \{裏, 表\}$, $P(\{裏\}) = p$ を考える.
裏が出たら $X = 0$, 表が出たら $X = 1$ となるような「ランダムな」変数 $X$ を考えたい.
この $X$ は，全事象から実数への関数とみなせる.
$X : \{裏, 表\} \to \mathbb{R}$
このような関数を確率変数という.
$X(裏) = 0, X(表) = 1$ を確率変数の実現値 という.
大胆にも，$X = 0, X = 1$ のような略記がされる.
$X = 1$ となる確率 $P(X = 1)$ は，$P(\{表\})$ に等しい.
直観的な説明
数学の確率論では，上の考え方を（さらに精密化）するが，応用上は次のように思っても困らない.

- 「全事象が $\Omega = \mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ であるような事象を確率変数という」
- 「$X = 0$ となる確率, $X = 1$ となる確率$\cdots$が備わっているランダムな変数 $X$ を確率変数という」

# ここまで来たよ

はじめに
- この授業どんなのり?

1 離散型確率変数
- 事象と確率
- 離散型確率変数
- 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

# 高校の確率

## 文章から確率を求める問題 高校 数学 A

トランプを 1 枚, 同じ確からしさで引く.

| 結果 | 確率 |
|---|---|
| $\heartsuit 1$ | $\frac{1}{52}$ |
| $\heartsuit 2$ | $\frac{1}{52}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\spadesuit 13$ | $\frac{1}{52}$ |
| 計 | $1$ |

偶数のカードのでる確率は? $\frac{24}{52}$.

# 離散型確率変数 久保川 統計学入門 §4.1

## 高校数学でよく見る確率の問題 高校 数学 A

袋に赤玉 2 個, 白玉 3 個がはいっている. いちどに 3 個取り出したとき, 赤玉が $x$ 個である確率は ?

$X$ は離散型 の確率変数 離散型 $\approx$ 実現値が可算個（例えば整数全体）
全事象が整数全体と思える.

| $x_k$ | 確率 $p_k = p(x_k) = P(X = x_k)$ |
|---|---|
| $\vdots$ | $0$ |
| $-1$ | $0$ |
| $0$ | $\frac{1}{10} = \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}$ |
| $1$ | $\frac{6}{10} = \frac{2\cdot 3}{{}_5\mathrm{C}_3}$ |
| $2$ | $\frac{3}{10} = \frac{1\cdot 3}{{}_5\mathrm{C}_3}$ |
| $3$ | $0$ |
| $\vdots$ | $0$ |
| 計 | $1$ |

## 言葉 確率分布 (確率関数, 確率質量関数)

久保川 統計学入門 §4.1

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & (x = 0) \\ \frac{6}{10} & (x = 1) \\ \frac{3}{10} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$p_k = p(x_k).$

## 高校と大学の, 確率の問題の違い

高校 数学 A ではこの表を作るまでを考える

高校 数学 B, 確率統計 I(*)L* ではこの表ができて与えられた後を考える. 'この表のとき, 赤玉の個数の母期待値は?'

# 確率 (質量) 関数と累積確率分布関数

**定義 (確率 (質量) 関数と累積確率分布関数 久保川 統計学入門 定義 4.1)**

確率変数 $X$ の実現値が $x_1, x_2, \ldots$ であるとき，$p(x_i) = P(X = x_i)$ を確率 (質量) 関数 (probability mass function) という．
$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$ を累積分布関数 (cumulative distribution function) という．

確率関数に対して，$0 \leq p(x) \leq 1$. $\displaystyle\sum_i p(x_i) = 1$ が成り立つ．

累積分布関数の性質は来週以降．

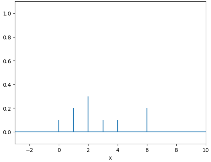
久保川 統計学入門 図 4.1

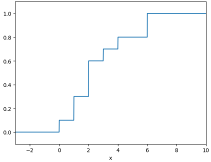
# 離散型確率変数の累積分布関数

連続型と同様の定義 $F(x) = P(X \leq x)$

**命題 (離散型確率変数の累積分布関数** 久保川 統計学入門 p.83**)**

累積分布関数の累積分布関数は，確率関数 $p(x)$ で，$F(x) = \sum_{x' \leq x} p(x')$ と書ける．





久保川 統計学入門 図 4.1

# ここまで来たよ

はじめに
- この授業どんなのり?

1. 離散型確率変数
   - 事象と確率
   - 離散型確率変数
   - 母期待値・母平均値・母分散・母標準偏差

# 関数 $g(x)$ の母期待値 $\mathrm{E}[g(X)]$ 高校 数学 AB 久保川 統計学入門 §4.2

**定義 (関数 $g(x)$ の母期待値 久保川 統計学入門 公式 4.4)**

離散型確率変数 $X$ が確率関数 $p(x) = \cdots$ を持つとき,

$$\text{関数 } g(x) \text{ の母期待値} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \times p(x).$$

$g$ は普通の関数. 例: $g(x) = x^2, \mathrm{e}^x$, (場合分けで書かれた関数), ...

**命題 (母期待値の性質)**

$\mathrm{E}[1] = 1$. ($g(x) = 1$ と $\sum_k p(x_k) = 1$ から)

**定義 (母平均値, 母分散, 母標準偏差)**

- 久保川 統計学入門 定義 4.2 $X$ の母平均値 $\mu \overset{\text{定義}}{=} \mathrm{E}[X]$. ($g(x) = x$ ってこと). ($X$ の) 母期待値ともいう.
- 久保川 統計学入門 定義 4.3 $X$ の 母分散 $\mathrm{Var}(X) \overset{\text{定義}}{=} \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$. ($g(x) = (x-\mu)^2$ の母期待値)
- $X$ の母標準偏差 $\overset{\text{定義}}{=} \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

「母」平均値で データ分析 の「標本」平均値 久保川 統計学入門 §1.2 と区別

## L01-Q1

### Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率関数を持つ.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[3 + 12\mathrm{e}^X]$ を求めよう.
2. $X$ の母平均値を求めよう.
3. $X$ の母分散を求めよう.
4. $X$ の累積分布関数 $F(x)$ のグラフを描こう.

久保川 統計学入門 問 1–4(p.100)

来週: 練習問題→ trial. 教科書備えて. データ分析 Google Colab 思い出しておいて.

# 幾何分布 久保川 統計学入門 §4.3.4 I

L01-Q2

## Quiz(離散的な確率変数の累積分布関数)

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ が次の確率関数を持つ．この $X$ のしたがう分布をパラメタ $p$ の幾何分布 $Geo(p)$ という．

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^x p & (x = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を，整数 $x$ に対して求めよう．

# 連続型確率変数

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L02(2026-04-20 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-11 Mon 11:52 JST hig"

## 今日の目標

- 久保川 統計学入門 §5.1 連続型確率変数とは何か説明できる
- 久保川 統計学入門 §5.2 連続型確率変数の確率，母平均値，母分散，母期待値，累積分布関数が計算できる

L01-Q1

TA Prob and Sol: 離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率関数を持つ.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{4}{12} & (x = -1) \\ \frac{5}{12} & (x = 0) \\ \frac{3}{12} & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[3 + 12\mathrm{e}^X]$ を求めよう.
2. $X$ の母平均値を求めよう.
3. $X$ の母分散を求めよう.
4. $X$ の累積分布関数 $F(x)$ のグラフを描こう.

略解

1. 母期待値
   $\mathrm{E}[3+12\mathrm{e}^X] = \frac{4}{12}\cdot(3+12\mathrm{e}^{-1})+\frac{5}{12}\cdot(3+12\mathrm{e}^0)+\frac{3}{12}\cdot(3+12\mathrm{e}^2) = 8+4\mathrm{e}^{-1}+3\mathrm{e}^2$.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X] = \frac{4}{12}\cdot(-1) + \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{3}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}(= \mu)$.
3. 母分散
   $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \frac{4}{12}\cdot(-1-\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{12}\cdot(0-\frac{1}{6})^2 + \frac{3}{12}(2-\frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}$.
4. 累積分布関数 $F(x)$ は $\mathbb{R}$ で定義され,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < -1) \\ 0 + \frac{4}{12} & (-1 \le x < 0) \\ \frac{4}{12} + \frac{5}{12} & (0 \le x < 2) \\ \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{3}{12} & (2 \le x < +\infty) \end{cases}.$$

(グラフ略).

久保川 統計学入門 問 1–4(p.100)

# ここまで来たよ

# 計算を楽にする母期待値の性質

**命題 (母期待値の性質** 高校 数学 B 久保川 統計学入門 公式 4.4(p.85)**)**

確率変数 $X$，$a, b \in \mathbb{R}$: 定数，関数 $g, h$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[ag(X) + bh(X)] &= \sum_x (ag(x) + bh(x)) \times p(x) = a\mathrm{E}[g(X)] + b\mathrm{E}[h(X)] \\ \mathrm{E}[a] &= a, \\ \mathrm{E}[1] &= 1, \\ \mathrm{E}[aX + b] &= a\mathrm{E}[X] + b \end{aligned}$$

**定義 ($k$ 次のモーメント** 久保川 統計学入門 p.121**)**

$\mathrm{E}[X^k]$ を $X$ の $k$ 次のモーメントという ($k = 0, 1, 2, \dots$).

$k$ 次のモーメントを部品として計算しておき, 他の母期待値は性質から導くのが楽.
$\mathrm{E}[X^2] \neq \mathrm{E}[X]^2$

# 母分散の性質 久保川 統計学入門 公式 4.5(p.86)

## 分散の計算方法（分散公式） 高校 数学 B 久保川 統計学入門 公式 4.5(p.86),p.106

$X$: 確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$: 定数 のとき,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2$$
$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

証明 $\mu = \mathrm{E}[X]$ とする.
$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] =$
$\mathrm{E}[X^2] - 2\mu \mathrm{E}[X] + \mu^2 \mathrm{E}[1] = \mathrm{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2.$
証明 $\mu = \mathrm{E}[X]$ と, $\mathrm{E}[Y] = \mu_{\mathrm{Y}} = a\mu + b$ とする.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) =& \mathrm{E}[(Y - \mu_{\mathrm{Y}})^2] \\ =& \mathrm{E}[((aX+b) - (a\mu + b))^2] \\ =& a^2 \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = a^2 \mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

# 母平均値・母分散の直観的意味

## 命題

離散型確率変数 $X$ の確率関数が $f(x)=\begin{cases} p_1 & (x=x_1) \\ \vdots & \\ p_n & (x=x_n) \end{cases}$ で与えられるとき，次が成立する．

$$\begin{aligned} \min_k x_k \leq & \ \mathrm{E}[X] \leq \max_k x_k, \\ 0 \leq & \mathrm{Var}(X) \leq (\max_k x_k - \min_k x_k)^2. \end{aligned}$$

直観的には，$x$ を座標と思うと，$\mathrm{E}[X]$ は位置，$\mathrm{Var}(X)$ は「幅」$^2$．
物理のりでは，$\mathrm{E}[X]$ は重心の位置，$\mathrm{Var}(X)$ は慣性モーメント（回しにくさ）

質点系の力学

この命題は，チェビシェフの不等式 久保川 統計学入門 p.158 で精密化される．

# 証明

## L02-Q1

### Quiz(離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差)

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (x = 3) \\ \frac{1}{3} & (x = 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $\mathrm{E}[X]$ の値を選ぼう.
   1. $-6$
   2. $-4$
   3. $0$
   4. $+4$
   5. $+6$
2. $\mathrm{Var}(X)$ の値を選ぼう.
   1. $-9$
   2. $-6$
   3. $0$
   4. $+6$
   5. $+9$

# ここまで来たよ

1. 離散型確率変数
2. 連続型確率変数
   - 母期待値・母分散の意味
   - 標本抽出と Python の scipy による確率変数の扱い
   - 連続型確率変数

# 確率変数の標本抽出

久保川 統計学入門 §7 を先取り

**定義 (標本, 標本抽出)**

確率変数 $X$ の値を得る試行を $n$ 回行って得られる実現値 $x$ の長さ $n$ の列を, サイズ (size)$n$ の標本 (sample) という.
標本を得る操作を標本抽出 (sampling) という.

標本は'毎回違った結果' になる.
データ分析 では標本を扱っていた.

# scipy による確率変数の標本抽出

https://colab.research.google.com

```
import numpy as np # ライブラリの読込
from scipy import stats

xk = (0,   1 ,  2  , 3  ,4   , 5  ,6)    # x_1, x_2,..,x_k
pk = (0.1, 0.2, 0.3, 0.1, 0.1, 0.0, 0.2) # p_1, p_2,..,p_k
rvx = stats.rv_discrete(values=(xk, pk)) # 離散型確率変数 X を定義
sample=rvx.rvs(size=30) # サイズ30の標本抽出(毎回違った結果になる)

# 母ナントカ. 答はいつも同じ
rvx.mean()# 母平均値
rvx.var() # 母分散
rvx.std() # 母標準偏差

# データ分析 でやってた標本平均値
## 標本抽出のたびに結果が変わる
sample.mean() # 標本平均値
sample.var()  # 不偏標本平均値
sample.std()  # 標本標準偏差
```

# ここまで来たよ

1. 離散型確率変数
2. 連続型確率変数
   - 母期待値・母分散の意味
   - 標本抽出と Python の scipy による確率変数の扱い
   - 連続型確率変数

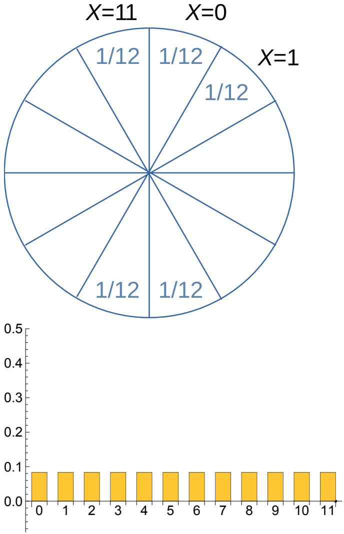
# 場合分けとそうでない確率変数

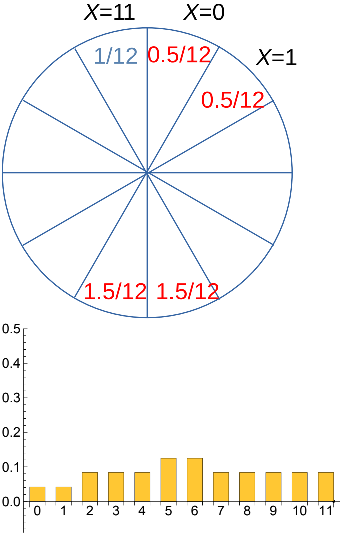
整数に値をとる離散型確率変数 $X$ が次の確率関数 $p(x)$ を持つ．
(同じこと)

$$p(x) = \begin{cases} 0.1 & (x = 6) \\ 0.2 & (x = 7) \\ 0.3 & (x = 8) \\ 0.4 & (x = 9) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \qquad p(x) = \begin{cases} (x-5)/10 & (6 \leq x \leq 9) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

# 離散型確率変数の例：離散ルーレット

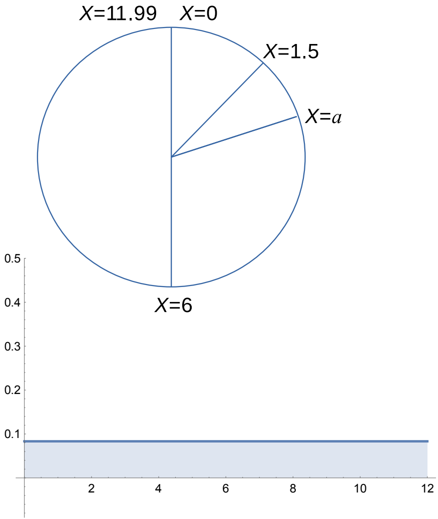
$P(X = 1) = 1/12, P(0 \leq X \leq a) =$ 棒 $0, \ldots, a$ の高さの和

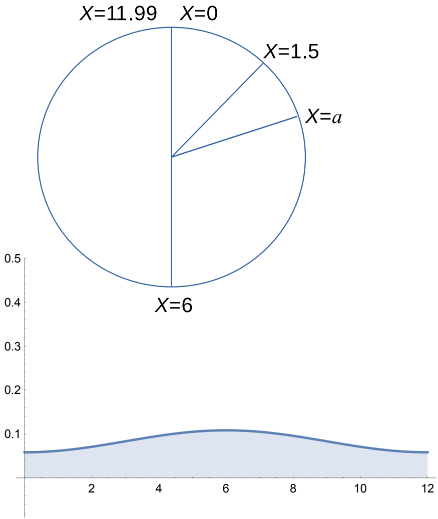


# 連続型確率変数の例：連続型ルーレット

$P(X=1)=0, P(0 \leq X \leq a)=a/12=$ (0 から $a$ までのグラフの面積)



# 連続型確率変数 久保川 統計学入門 §5.1

**定義 (連続型確率変数 久保川 統計学入門 p.104)**

連続型確率変数 $X$ とは, 実数のように連続値をとる確率変数のこと.

$\rightsquigarrow$ $X$ の実現値の出やすさは $x$ のある関数 $f(x)$ で表される!

連続型確率変数 連続型確率分布

連続型 確率密度関数 $f(x)$ ($x$ は実数)

離散型 確率関数 $p(x)$ ($x$ は整数またはとびとびの値)

## 定義 (確率密度関数 久保川 統計学入門 p.104)

次の性質を持つ関数 $f(x)$ を，連続型確率変数の**確率密度関数**という．$X$ の確率分布を指定できる．

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$f(x) \leq 1$ とはいえない！

離散的

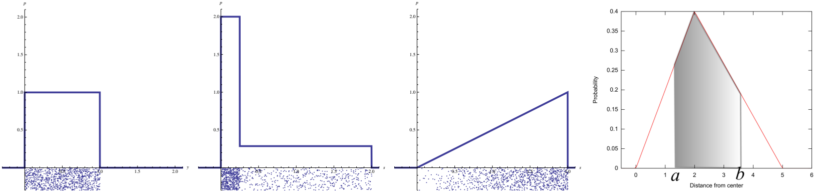
| 得点 $x$ | 確率 $p(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0.1 |
| 1 | 0.3 |
| $\vdots$ | |
| $x$ | $p(x)$ |

連続的

- $f(x)$ が大きいほど, その値 $x$ がでやすい

物理・工学系では $p(x)$ と書いたら確率密度関数 $f(x)$ を意味することも

# 確率密度関数の例




横軸下の細かい点が, 標本 (縦方向の位置はランダムで意味なし)

**命題 (確率密度関数と確率** 久保川 統計学入門 p.104**)**

$$P(c < X \leq d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

# 連続型確率変数の母期待値

**定義 (母期待値 久保川 統計学入門 定義 5.3, 5.4)**

$$\text{離散型確率変数} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot p(x)$$

$$\text{連続型確率変数} \quad \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\, \mathrm{d}x$$

- 離散型と同じ定義，同じ公式が成立．
- 母平均値 $\mu = \mathrm{E}[X]$, 母分散 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mu)^2]$.

**定義 ($k$ 次のモーメント ($k = 0, 1, 2, 3, \cdots$) 久保川 統計学入門 p.121)**

$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)\, \mathrm{d}x$$

性質 $\mathrm{E}[X^0] = 1, \mathrm{E}[X^{2k}] \geq 0$.

## L02-Q2

### Quiz(連続型確率変数)

次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型確率変数 $X$ を考える．次を求めよう．

$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X^k]$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$
3. 母分散 $\mathrm{Var}(X)$
4. 母期待値 $\mathrm{E}[(2X+3)^2]$
5. 母分散 $\mathrm{Var}(2X+3)$
6. 確率 $P(-\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{4})$

久保川 統計学入門 例題 5.6,5.7(p.107),§5 基本問題問 2,3(p,124)

## L02-Q3

### Quiz(連続型確率変数)

次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型確率変数 $X$ を考える．次を求めよう．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & (-1 \le x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X^k]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$
3. 母分散 $\mathrm{Var}(X)$
4. 母期待値 $\mathrm{E}[(2X+3)^2]$
5. 母分散 $\mathrm{Var}(2X+3)$
6. 確率 $P(-\frac{1}{4} < X \le \frac{1}{4})$

# 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L03(2026-04-27 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-15 Fri 09:10 JST hig"

今日の目標

- 連続型確率変数の累積分布関数と分位点関数が計算できる 久保川 統計学入門 §5.1
- 連続一様分布の母期待値，累積分布関数，分位点関数が計算できる 久保川 統計学入門 §5.3.1

## L02-Q1

TA Prob and Sol: 離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

整数に値をとる離散型確率変数 $X$ は次の確率関数を持つ．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (x = 3) \\ \frac{1}{3} & (x = 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

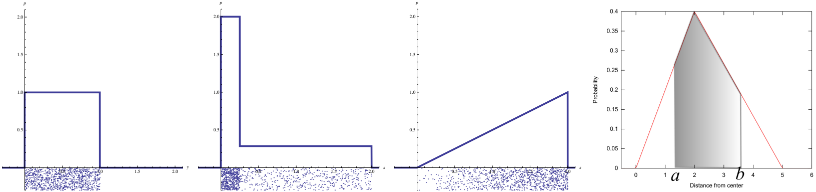
1. $\mathrm{E}[X]$ の値を選ぼう．
   1. $-6$
   2. $-4$
   3. $0$
   4. $+4$
   5. $+6$
2. $\mathrm{Var}(X)$ の値を選ぼう．
   1. $-9$
   2. $-6$
   3. $0$
   4. $+6$
   5. $+9$

# ここまで来たよ

2 連続型確率変数

3 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布
- 連続型確率変数の復習
- 累積分布関数
- 分位数関数と分位数
- 連続一様分布

# 復習: 連続型確率変数の確率密度関数




横軸下の細かい点が, 標本 (縦方向の位置はランダムで意味なし)

**命題 (確率密度関数と確率** 久保川 統計学入門 p.104**)**

$$P(c < X \leq d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

# 確率密度関数と母平均値，母分散の直観的な意味（連続型バージョン）

形のわからない面積 1 の板（確率密度関数のグラフとも言う）が，$x$ 軸のどこかに置かれてる．

- どこに置かれた？ $\rightsquigarrow$ 母平均値
  - 重心 $\rightsquigarrow$ 板を指 1 本で支えられる位置
- どのくらいの幅？ $\rightsquigarrow$ 母分散 $()^{1/2}$.
  - 高さは，面積 1 であることから決まる

板のいちばん簡単な形は長方形 $\rightsquigarrow$ 連続一様分布
板の面積は確率に対応する

$$\boxed{\text{位置 } x} \quad \begin{array}{c} \text{累積分布関数 } F \\ \longrightarrow \\ \text{分位数関数 } F^{-1} \\ \longleftarrow \end{array} \quad \boxed{\text{確率 } p = P(X \le x)}$$

# $k$ 次のモーメント

$f(x)$: 確率密度関数, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x.$$

$x > 0$ である下限の $x$ を $x_{\mathsf{min}}$, $x > 0$ である上限の $x$ を $x_{\mathsf{max}}$ とすると,

- $\mathrm{E}[X^0] = 1$.
- $x_{\mathsf{min}} \leq \mathrm{E}[X^1] \leq x_{\mathsf{max}}$.
- $0 \leq \mathrm{E}[(X - \mu)^2] \leq (x_{\mathsf{max}} - x_{\mathsf{min}})^2$.
- $\mathrm{E}[X^{2k}] > 0$.
- $f(x)$ が, $x > 0$ でのみ $f(x) > 0$ のとき, $\mathrm{E}[X^k] > 0$.
- $f(x)$ が, $x < 0$ でのみ $f(x) > 0$ のとき, $\mathrm{E}[X^{2k}] > 0$, $\mathrm{E}[X^{2k+1}] < 0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき, $\mathrm{E}[X^{2k+1}] = 0$.

# L03-Q1

## Quiz(連続型確率変数のモーメントの性質)

連続型確率変数 $X$ は確率密度関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2^5}x^4 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$ を持つ．$k$ 次のモーメントとして正しいものを選ぼう．

1. $\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$
2. $\frac{5\cdot 2^k}{5+k}$
3. $-\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$
4. $-\frac{5\cdot 2^k}{5+k}$

# ここまで来たよ

## 定義 (累積分布関数 久保川 統計学入門 §4.1(p.83)§5.1(p.104))

$F(x) = P(X \leq x)$ を累積分布関数（分布関数, 確率分布関数）という.

## 命題 (累積分布関数の性質 久保川 統計学入門 p.104)

(C1) $F(x)$ は広義単調増加関数
(C2) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$
(C3) $P(c < X \leq d) = F(d) - F(c).$

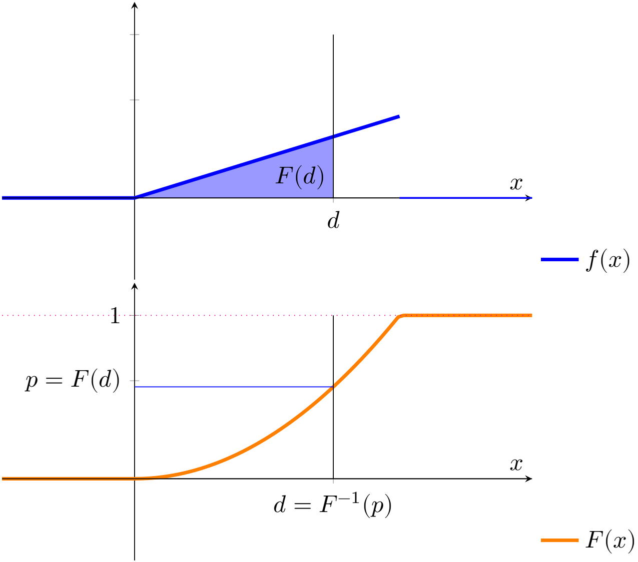
## 定義 (連続型確率変数の累積分布関数 久保川 統計学入門 p.104)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

## 命題 (久保川 統計学入門 公式 5.1(p.105))

$F$ が微分可能なとき，$f(x)$ は $F(x)$ の導関数

$\boxed{\text{確率密度関数 } f}$ $\underset{\overleftarrow{\text{微分}}}{\overset{\text{積分}}{\longrightarrow}}$ $\boxed{\text{累積分布関数 } F}$ 久保川 統計学入門 例題 5.2




久保川 統計学入門 図 5.4

## ここまで来たよ

# 連続型確率変数の分位数関数

**定義 (分位数関数** 久保川 統計学入門 p.109**)**

確率変数 $X$ の 累積分布関数の, 区間 $[0,1]$ で定義された逆関数 $x = F^{-1}(p)$ を分位数関数, $F^{-1}(q)$ を, $q$-(下側) 分位点 $F^{-1}(1-q)$ を, $q$-上側分位点 という.

意味

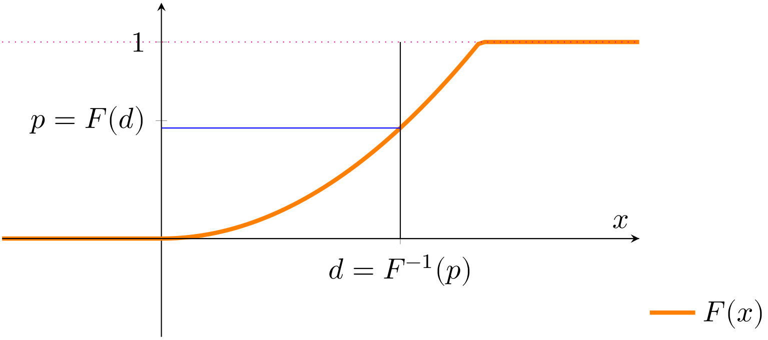
'$q$-下側分位点とは，確率 $P(X \leq d)$ が $q$ に等しくなる**最小ぎりぎりの**境い目 $x = d$'

$F^{-1}(y)$ は, 確率 $y = q$ を与えると, そうなる境い目を返してくれる関数.

'$q$-上側分位点とは，確率 $P(X \geq d)$ が $q$ に等しくなる**最大ぎりぎりの**境い目 $x = d$'

言い訳

定義域 $[0,1]$ の端は含められない場合もある． $F(x)$ が狭義単調増加でない限り逆関数 $F^{-1}$ は定義できない．これらのややこしいケースには深入りしない．離散型にも深入りできない．




**例 (中央値・四分位点)**

$F^{-1}(\frac{1}{2})$ は分布の (母) 中央値, $F^{-1}(\frac{1}{4}), F^{-1}(\frac{3}{4})$ は分布の (母) 四分位点.

データ分析

(標本) 中央値，四分位点 久保川 統計学入門 §1.2.3

# L03-Q2

## Quiz(連続的な確率変数の確率・累積分布関数・分位数関数)

連続型確率変数 $X$ は次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & (0 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
2. 確率 $P(X \geq 3)$ を求めよう.
3. 確率 $P(-1 < X \leq 2)$ を求めよう.
4. 分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
5. 確率 $P(X \leq d) = \frac{1}{3}$ となる $d$ を求めよう.

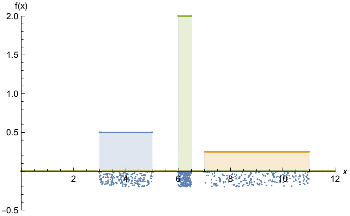
# ここまで来たよ

# 連続一様分布 久保川 統計学入門 §4.3.1

## （連続）一様分布 $U(c,d)$

確率変数 $X$ の確率密度関数が次で与えられるとき，$X$ は区間 $[c,d]$ の連続一様分布 $U(c,d)$ にしたがうという．

$$f(x) == \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x \leq d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$




$U(4,6), U(6,6.5), U(7,11).$

# 連続一様分布 久保川 統計学入門 §4.3.1

連続一様分布

```
import scipy.stats
rvx = stats.uniform(loc=c,scale=d−c) # U(c,d)
```

Colab LearnMoodle 連続型確率変数-連続一様分布.ipynb loc=位置, scale=尺度

## L03-Q3

### Quiz(連続一様分布)

連続型確率変数 $X$ が連続一様分布 $U(c,d)$ にしたがう.

1. モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母標準偏差 $\mathrm{Var}(X)^{1/2}$ を求めよう.

さっき想像した，母平均値・母標準偏差の意味とマッチしてる?

| | | 母ナントカ | scipy.stats |
|---|---|---|---|
| 位置<br>広がり | 位置母数<br>尺度母数 | $\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}$<br>$\mathrm{Var}(X)^{1/2} = \frac{d-c}{\sqrt{12}}$ | loc=$c$<br>scale=$d-c$ |

$U(c,d)$ に対するこの結果は，公式のように記憶して使おう．

久保川 統計学入門 発展問題問 6(p.125)

# scipy による連続型確率変数

https://colab.research.google.com

```
import numpy as np # ライブラリの読込
from scipy import stats

rvx = stats.uniform(loc=2,scale=3) # 連続一様分布，専用の名前がある．
                                   # loc=c, scale=d − c
# 母ナントカ．答はいつも同じ
rvx.mean()# 母平均値
rvx.var() # 母分散
rvx.std() # 母標準偏差
rvx.moment(k) k 次のモーメント
rvx.pdf(x) 確率密度関数 probability density function
rvx.cdf(x) 累積分布関数 cumurative density function
rvx.ppf(p) 分位数関数 percent point function

# データ分析 でやってた標本ナントカ 毎回違った結果
sample=rvx.rvs(size=30) # サイズ30の標本抽出
sample.mean() # 標本平均値
sample.var()  # 不偏標本平均値
sample.std()  # 標本標準偏差
```

## L03-Q4

## Quiz(連続一様分布の累積分布関数・分位数関数)

連続型確率変数 $X$ は連続一様分布 $U(-9,-3)$ にしたがう．すなわち，次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ．

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (-9 \leq x \leq -3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．グラフを描こう．
2. 確率 $P(X \leq -7)$ を求めよう．
3. 確率 $P(-7 \leq X \leq -5)$ を求めよう．
4. 確率 $P(-4 \leq X \leq +1)$ を求めよう．
5. 確率 $P(X \geq -8)$ を求めよう．
6. $F(x)$ の定義域を $[-9,-3]$ に制限して，分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう．グラフを描こう．
7. 確率 $P(X \leq d) = \frac{1}{3}$ となる $d$ を求めよう．

# L03-Q5

## Quiz(連続型確率変数の累積分布関数・分位数関数)

連続型確率変数 $X$ が次の確率密度関数を持つ．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-2) & (2 \leq x \leq 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．グラフを描こう．
2. 確率 $P(X \geq 5)$ を求めよう．
3. $F(x)$ の定義域を $[2, 6]$ に制限して，分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう．グラフを描こう．
4. 中央値，四分位点を求めよう．

# 確率変数の 1 次式による変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L04(2026-05-11 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-11 Mon 21:46 JST hig"

今日の目標

- Google Colab で確率，分位数が計算できる
- 確率変数の 1 次式による変換の意味が説明できる

## L03-Q1

## TA Prob and Sol: 連続型確率変数のモーメントの性質

連続型確率変数 $X$ は確率密度関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2^5}x^4 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$ を持つ．$k$ 次のモーメントとして正しいものを選ぼう．

1. $\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$
2. $\frac{5\cdot 2^k}{5+k}$
3. $-\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$
4. $-\frac{5\cdot 2^k}{5+k}$

### 略解

$\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$.

定義にしたがって定積分することで求められるが，次の考察から消去法で 1 つに絞ることもできる．

$\mathrm{E}[X^0] = 1$ が成立するのは最初 2 つのみ．この 2 つのうち，$\mathrm{E}[X^1] < 0$ となるのは $\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$ のみ．

コメント

L03-Q2

TA Prob and Sol: 連続的な確率変数の確率・累積分布関数・分位数関数

連続型確率変数 $X$ は次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & (0 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
2. 確率 $P(X \geq 3)$ を求めよう.
3. 確率 $P(-1 < X \leq 2)$ を求めよう.
4. 分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
5. 確率 $P(X \leq d) = \frac{1}{3}$ となる $d$ を求めよう.

略解

1. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$
   $x < 0$ のとき，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$
   $x > 4$ のとき，$F(x) = 1$ (全確率).
   $0 < x \leq 4$ のとき，$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{1}{8}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}x^2.$
2. $P(X \geq 3) = P(3 \leq X > +\infty) = F(+\infty) - F(3) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$
3. $P(-1 < X \leq 2) = F(2) - F(-1) = \frac{1}{4}.$
4. $0 \leq x \leq 4$ に対して $p = F(x)$ を解くと，$x = \pm 4\sqrt{p}$ このうち，
   $0 \leq x \leq 4$ を値域とするのは $x = \pm 4\sqrt{p}.$
5. 分位数関数の値 $d = F^{-1}(\frac{1}{3}) = 4 \cdot 3^{-1/2}.$

## L03-Q3

### TA Prob and Sol: 連続一様分布

連続型確率変数 $X$ が連続一様分布 $U(c,d)$ にしたがう.

1. モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母標準偏差 $\mathrm{Var}(X)^{1/2}$ を求めよう.

### 略解

1. $\mathrm{E}[X^k] = \frac{1}{d-c}\int_c^d x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\frac{d^{k+1}-c^{k+1}}{d-c} = \frac{1}{k+1}(d^k + d^{k-1}c + \cdots + c^k)$.
2. $\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}$.
3. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$. $\mathrm{Var}(X)^{1/2} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}$.

## L03-Q4

## TA Prob and Sol: 連続一様分布の累積分布関数・分位数関数

連続型確率変数 $X$ は連続一様分布 $U(-9,-3)$ にしたがう．すなわち，次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f_{\mathrm{X}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{6} & (-9\leq x\leq -3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．グラフを描こう.
2. 確率 $P(X\leq -7)$ を求めよう.
3. 確率 $P(-7\leq X\leq -5)$ を求めよう.
4. 確率 $P(-4\leq X\leq +1)$ を求めよう.
5. 確率 $P(X\geq -8)$ を求めよう.
6. $F(x)$ の定義域を $[-9,-3]$ に制限して，分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう．グラフを描こう.
7. 確率 $P(X\leq d)=\frac{1}{3}$ となる $d$ を求めよう.

# 略解

1. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
   $x \leq -9$ の時，$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0$.
   $-9 \leq x \leq -3$ の時，$F(x) = \int_{-9}^{x} \frac{1}{6} t\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(x+9)$.
   $-3 < x$ の時，$F(x) = \int_{-\infty}^{-9} 0\ \mathrm{d}x + \int_{-9}^{-3} \frac{1}{6} t\ \mathrm{d}t + \int_{-3}^{x} 0\ \mathrm{d}t$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -9) \\ \frac{x-(-9)}{-3-(-9)} & (-9 < x \leq -3) \\ 1 & (-3 < x) \end{cases}$$

.

2. $P(X \leq -7) = F(-7) = \frac{1}{3}$.
3. $P(-7 \leq X \leq -5) = F(-5) - F(-7) = \frac{1}{3}$.
4. $P(-4 \leq X \leq +1) = F(+1) - F(-4) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{8}$.
   $P(-4 \leq X \leq +1) = \int_{-4}^{+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-3} \frac{1}{6}\mathrm{d}x$.

5. $P(X \geq -8) = P(-8 \leq X < +\infty) = F(+\infty) - F(-8) = 1 - F(-8) = \frac{5}{6}$.
6. $p = \frac{x+9}{6}$ を $x$ について解いて，$x = 6p - 9$. よって $F^{-1}(p) = 6p - 9$.
7. $F^{-1}(\frac{1}{3}) = -7$. すでに検算していた.

# ここまで来たよ

3. 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布

4. 確率変数の 1 次式による変換
   - 分位数関数
   - 確率変数の 1 次式による変換

# 復習: 分位数関数 I

L04-Q1

## Quiz(連続一様分布の分位数関数)

連続一様分布 $U(-4, 4)$ にしたがう確率変数 $X$ を考える.

1. $X$ の累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
2. $X$ の分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
3. 確率 $P(X \geq d_1) = 0.05$ となる $d_1$ を $F^{-1}$ で表わし，求めよう.
4. 確率 $P(|X| \geq d_2) = 0.05$ となる $d_2$ を $F^{-1}$ で表わし，求めよう.

# ここまで来たよ

3 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布

4 確率変数の 1 次式による変換
- 分位数関数
- 確率変数の 1 次式による変換

# 2 次関数の確率密度関数で表される分布 I

L04-Q2

## Quiz(確率密度関数が 2 次関数の分布)

連続型確率変数 $Z$ の確率密度関数を $f(z)$，累積分布関数を $F(z)$ とする．

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2-5) & (|z| \le \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

1. $f(z)$,$F(z)$ のグラフの概形を描こう．
2. モーメント $\mathrm{E}[Z^k]$，母平均値 $\mathrm{E}[Z]$，母分散 $\mathrm{Var}(Z)$ を求めよう．
3. 確率 $P(|Z| \le 1)$ を $F(z)$ で表わし，数値で求めよう．
4. $P(Z \ge d_1) = 0.05$ となる $d_1$ を $F^{-1}$ で表わし，数値で求めよう．
5. $P(|Z| \ge d_2) = 0.05$ となる $d_2$ を $F^{-1}$ で表わし，数値で求めよう．

# 2 次関数の確率密度関数で表される分布 II

実は，3 次方程式を解いて，$F^{-1}(p) = 2\sqrt{5}\cos(\frac{1}{3}\arccos(1-2p) - \frac{2}{3}\pi)$.

# 確率変数の 1 次式による変換

確率変数 $Z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ をサイコロの目，それに応じてもらえる賞金を $X = 500 + 100Z = 600, 700, 800, 900, 1000, 1100$
累積分布関数をそれぞれ $F_{\mathrm{z}}(z)$, $F_{\mathrm{x}}(y)$ とすると，

$$P(Z \leq z) = F_{\mathrm{z}}(z) = F_{\mathrm{x}}(500 + 100z) = P(X \leq 500 + 100z)$$

$$F_{\mathrm{z}}\left(\tfrac{x-500}{100}\right) = P\left(Z \leq \tfrac{x-500}{100}\right) = P(500 + 100Z \leq x) = P(X \leq x) = F_{\mathrm{x}}(x)$$

大文字：確率変数，小文字：実現値（2 とか 700 とかを代入できる）．

確率密度関数 $f$ $\overset{\text{積分}}{\longrightarrow}$ 累積分布関数 $F$ 久保川 統計学入門 例題 5.2
$\overset{\text{微分}}{\longleftarrow}$

## 命題 (久保川 統計学入門 公式 5.24(p.123))

一般に，確率変数 $Z, X$ が $X = aZ + b\ (a > 0)$ の関係にあるとき，累積分布関数を $F_{\mathrm{Z}}(z), F_{\mathrm{X}}(x)$ とすると，

$$F_{\mathrm{Z}}\left(\frac{x-b}{a}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-b}{a}\right) = P(aZ + b \leq x) = P(X \leq x) = F_{\mathrm{X}}(x)$$

さらに，$Z, X$ が連続確率変数で，確率密度関数 $f_{\mathrm{Z}}(z), f_{\mathrm{X}}(x)$ を持ち，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{\mathrm{Z}}(z) = f_{\mathrm{Z}}(z), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\mathrm{X}}(x) = f_{\mathrm{X}}(x)$ を満たすとき，上の両辺を $x$ で微分して，

$$\frac{1}{a} f_{\mathrm{Z}}\left(\frac{x-b}{a}\right) = f_{\mathrm{X}}(x)$$

つまり，横に $a$ 倍拡大，縦に $1/a$ 倍した後，水平に $b$ だけ平行移動したグラフになる．

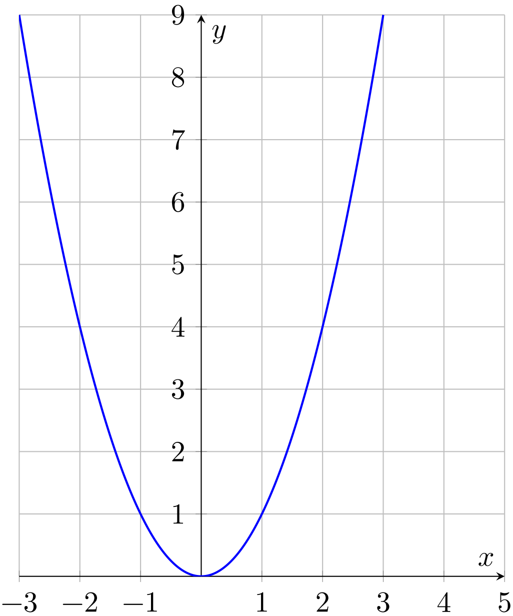
# 復習：グラフの平行移動と拡大縮小

$y = f(x)$ のグラフを，

- 横に $b$ 平行移動すると $y = f(x - b)$.
- 横に $b$, 縦に $d$ 平行移動すると $y - d = f(x - b)$.
- $y$ 軸を中心に横に $a$ 倍すると，$y = f(\frac{x}{a})$.
- $y$ 軸を中心に横に $a$ 倍，$x$ 軸を中心に縦に $c$ 倍すると，$\frac{y}{c} = f(\frac{x}{a})$.
- まず $y$ 軸を中心に横に $a$ 倍，$x$ 軸を中心に縦に $c$ 倍，次に横に $b$ 平行移動すると，$\frac{y}{c} = f(\frac{x-b}{a})$.

$y = x^2$

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2$.
- $y = c \cdot (\frac{x-b}{a})^2$




$y = x^2$,
$b = 3, d = 0$,
$a = 2, c = 1/2$.

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2$.
- $y = c \cdot (\frac{x-b}{a})^2$

# L04-Q3

## Quiz(2 次関数の定める連続型分布)

連続型確率変数 $Z$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ が次で与えられる．累積分布関数を $F_Z(z)$ とする．

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

1. $X_1 = Z + 3$ の確率密度関数 $f_1(x)$ を求めグラフを描こう．
2. $X_2 = 2Z$ の確率密度関数 $f_2(x)$ を求めグラフを描こう．
3. $X_3 = 2Z + 3$ の平均と分散を求めよう．$X_3$ の確率密度関数 $f_3(x)$ を求めグラフを描こう．
4. 確率 $P(4 < X_3 \leq 5)$ を $F_Z(z)$ で表そう．
5. $P(X_3 \leq d) = 0.01$ となる $d$ を $F_Z^{-1}(p)$ で表そう．

# この授業だけの記号

## 2 次関数の確率密度関数が定める分布

確率変数 $X$ が確率密度関数

$$f(x) = -\frac{3}{4\sqrt{5}a}\left(\frac{(x-b)^2}{5a^2} - 1\right)$$

を持つとき，$X \sim Q(b, a^2)$ とかく．

さっきの $Z \sim Q(0, 1^2)$.
$X \sim Q(b, a^2)$ ならば $\mathrm{E}[X] = b, \mathrm{Var}(X) = a^2$.

# 確率変数の標準化・正規分布

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L05(2026-05-18 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-18 Mon 13:16 JST hig"

今日の目標

- 確率変数の 1 次式による変換を説明できる 久保川 統計学入門 §5.5 確率分布を標準化して確率や分位数を計算できる 久保川 統計学入門 p.120
- 標準正規分布の母期待値，確率を求められる

## L04-Q1
## TA Prob and Sol: 連続一様分布の分位数関数

連続一様分布 $U(-4,4)$ にしたがう確率変数 $X$ を考える．

1. $X$ の累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．
2. $X$ の分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう．
3. 確率 $P(X \geq d_1) = 0.05$ となる $d_1$ を $F^{-1}$ で表わし，求めよう．
4. 確率 $P(|X| \geq d_2) = 0.05$ となる $d_2$ を $F^{-1}$ で表わし，求めよう．

### 略解

1.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -4) \\ \frac{x+4}{8} = \frac{x-(-4)}{4-(-4)} & (-4 \leq x \leq 4) \\ 1 & (4 < x) \end{cases}$$

2. $F^{-1}(p) = -4 + 8p$.
3. $P(X \geq d_1) = P(d_1 \leq X < +\infty) = 1 - F(d_1)$. よって，
   $F(d_1) = 0.95$. $d_1 = F^{-1}(0.95) = 3.6$.
   または，$f(x)$ が偶関数であることから，
   $P(X \geq d_1) = P(X \leq -d_1) = F(-d_1)$ より，
   $d_1 = -F(0.05) = -(-3.6)$.
4. $f(x)$ が偶関数であることから，
   $P(|X| \geq d_2) = P(X \leq -d_2) + P(X \geq d_2) = 2 \times P(X \leq -d_2)$. よって，$d_2 = -F^{-1}(0.05/2)$. または，$d_2 = F^{-1}(1 - 0.05/2)$.

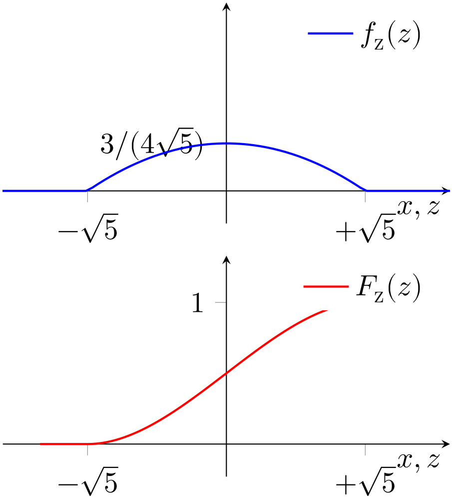
# L04-Q2
## TA Prob and Sol: 確率密度関数が 2 次関数の分布

連続型確率変数 $Z$ の確率密度関数を $f(z)$，累積分布関数を $F(z)$ とする．

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2-5) & (|z| \le \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

1. $f(z)$,$F(z)$ のグラフの概形を描こう．
2. モーメント $\mathrm{E}[Z^k]$，母平均値 $\mathrm{E}[Z]$，母分散 $\mathrm{Var}(Z)$ を求めよう．
3. 確率 $P(|Z| \le 1)$ を $F(z)$ で表わし，数値で求めよう．
4. $P(Z \ge d_1) = 0.05$ となる $d_1$ を $F^{-1}$ で表わし，数値で求めよう．
5. $P(|Z| \ge d_2) = 0.05$ となる $d_2$ を $F^{-1}$ で表わし，数値で求めよう．

略解

1. 


2. $\mathrm{E}[Z^k] = (1 + (-1)^k)\frac{3}{4} \cdot 5^{k/2}(-\frac{1}{3+k} + \frac{1}{1+k})$. $\mathrm{E}[Z] = 0$ は $f(z)$ が偶関数であることからもわかる.
3. $P(|Z| \leq 1) = F(1) - F(-1) = 0.626$. (電卓 or Colab).

4. $d_1 = F^{-1}(1-0.05) = 1.63$. (Colab).
5. $f(z)$ は偶関数なので，$d_2 = F^{-1}(1-0.05/2) = 1.81$. (Colab).

L04-Q3

TA Prob and Sol:2 次関数の定める連続型分布

連続型確率変数 $Z$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ が次で与えられる．累積分布関数を $F_Z(z)$ とする．

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

1. $X_1 = Z + 3$ の確率密度関数 $f_1(x)$ を求めグラフを描こう．
2. $X_2 = 2Z$ の確率密度関数 $f_2(x)$ を求めグラフを描こう．
3. $X_3 = 2Z + 3$ の平均と分散を求めよう．$X_3$ の確率密度関数 $f_3(x)$ を求めグラフを描こう．
4. 確率 $P(4 < X_3 \leq 5)$ を $F_Z(z)$ で表そう．
5. $P(X_3 \leq d) = 0.01$ となる $d$ を $F_Z^{-1}(p)$ で表そう．

略解

1. $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[Z] + 3 = 3$. $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(Z) = 1$.
$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{3}{20\cdot\sqrt{5}}((x-3)^2-5) & (|x-3| \le \sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$
2. $\mathrm{E}[X_2] = 2\mathrm{E}[Z] = 0$. $\mathrm{Var}(X_2) = 2^2\mathrm{Var}(Z) = 2^2$.
$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{3}{20\cdot\sqrt{5}}((\frac{x}{2})^2-5) & (|\frac{x}{2}| \le \sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$
3. $\mathrm{E}[X_3] = 2\mathrm{E}[Z] + 3 = 3$. $\mathrm{Var}(X_3) = 2^2\mathrm{Var}(Z) = 2^2$.
$$f_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{3}{20\cdot\sqrt{5}}\left((\frac{x-3}{2})^2-5\right) & (|\frac{x-3}{2}| \le \sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$
4. $P(4 < X_3 \le 5) = P(4 < 2Z+3 \le 5) = P(\frac{4-3}{2} < Z \le \frac{5-3}{2}) = F_Z(1) - F_Z(\frac{1}{2})$.
5. $0.01 = P(X_3 \le d) = P(2Z+3 \le d) = P(Z \le \frac{d-3}{2}) = F_Z(\frac{d-3}{2})$. $\frac{d-3}{2} = F_Z^{-1}(0.01)$. $d = 2F_Z^{-1}(0.01) + 3$.

# 復習：グラフの平行移動と拡大縮小

$y = f(x)$ のグラフを，

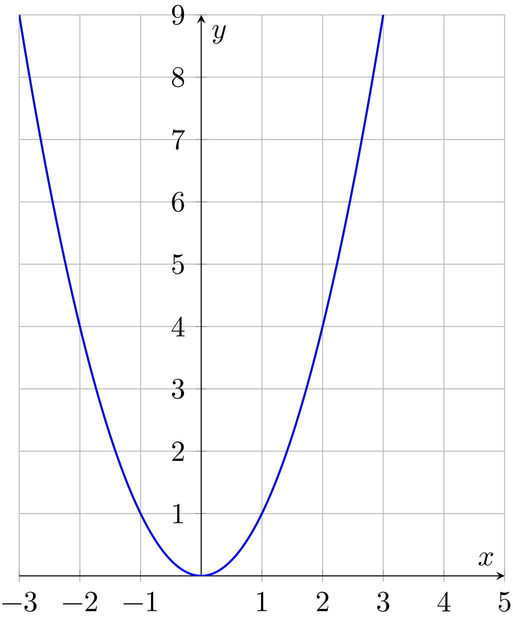
- 横に $b$ 平行移動すると $y = f(x-b)$.
- 横に $b$, 縦に $d$ 平行移動すると $y - d = f(x-b)$.
- $y$ 軸を中心に横に $a$ 倍すると，$y = f(\frac{x}{a})$.
- $y$ 軸を中心に横に $a$ 倍，$x$ 軸を中心に縦に $c$ 倍すると，$\frac{y}{c} = f(\frac{x}{a})$.
- まず $y$ 軸を中心に横に $a$ 倍，$x$ 軸を中心に縦に $c$ 倍，次に横に $b$ 平行移動すると，$\frac{y}{c} = f(\frac{x-b}{a})$.

$y = x^2$

- $y = (x-b)^2$
- $y = (x-b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2$.
- $y = c \cdot (\frac{x-b}{a})^2$

$y = x^2$,
$b = 3, d = 0$,
$a = 2, c = 1/2$.

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2$.
- $y = c \cdot \left(\frac{x-b}{a}\right)^2$

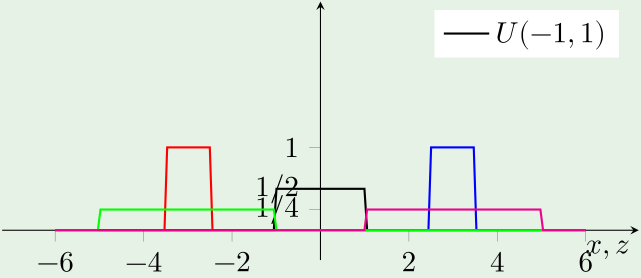


## L05-Q1

### Quiz(連続一様分布にしたがうの確率変数の 1 次変換)

連続一様分布 $U(-1,1)$ にしたがう確率変数 $Z$ を考える．$Z$ の確率密度関数 $f(z)$ は黒で描かれている．

1. 確率変数 $X = 2Z + 3$ の確率密度関数を選ぼう．
2. 関数 $\frac{1}{1/2} f(\frac{x+3}{1/2})$ を選ぼう．



# ここまで来たよ

4 確率変数の 1 次式による変換

5 確率変数の標準化・正規分布

- 確率変数の 1 次式による変換
- 確率変数の標準化
- 標準正規分布

# 2 次関数の確率密度関数で表される分布 I

前回同様，連続型確率変数 $Z$ が次の分布にしたがうとする．

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2-5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

$X = aZ + b$ は次にしたがう． 久保川 統計学入門 公式 5.24(p.123)

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{X}}(x) =& \frac{1}{a} f_{\mathrm{Z}}\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ =& \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}a}\left(\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 - 5\right) & \left(\left|\frac{x-b}{a}\right| \leq \sqrt{5}\right) \\ 0 & \left(\left|\frac{x-b}{a}\right| > \sqrt{5}\right) \end{cases} \\ =& \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}a}\left(1 - \frac{(x-b)^2}{5a^2}\right) & (b - \sqrt{5}a \leq x \leq b + \sqrt{5}a) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \end{aligned}$$

$z$ は，$a = 1$, $b = 0$ とおいた場合．

## この授業内だけの定義

### 定義

上の確率密度関数を持つとき，$X$ は分布 $Q(b, a^2)$ にしたがう，といい，$X \sim Q(b, a^2)$ とかく．

$b, a$ を，分布のパラメタ，母数という．

### 命題 ($Q(b, a^2)$ の性質)

$X \sim Q(b, a^2)$ のとき，
$\mathrm{E}[X] = b, \mathrm{Var}(X) = a^2$.
確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ は，幅 $2\sqrt{5}a$ の区間 $b - \sqrt{5}a \leq x \leq b + \sqrt{5}a$ の外では 0.

# ここまで来たよ

4 確率変数の 1 次式による変換

5 確率変数の標準化・正規分布
- 確率変数の 1 次式による変換
- 確率変数の標準化
- 標準正規分布

# 確率変数の標準化 久保川 統計学入門 p.120

## 定義 (標準化された確率変数)

確率変数 $Z$ が, $\mathrm{E}[Z] = 0, \mathrm{Var}(Z) = 1^2$ を満たすとき, $Z$ は標準化された確率変数という.

任意の確率変数 $X$ は, 1 次式で，標準化された確率変数に変換できる．このとき，確率密度関数のグラフは，拡大，移動しただけで，形は同じ．

## 定義 (確率変数の標準化 久保川 統計学入門 p.120)

任意の確率変数 $X$ に対して, $\mu = \mathrm{E}[X], \sigma^2 = \mathrm{Var}(X), \sigma > 0$ とする.
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準化された確率変数.「$Z$ は $X$ を標準化した確率変数」という.

$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[\frac{X-\mu}{\sigma}] = \boxed{0}$,
$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \boxed{1}$.

## 確率変数の標準化とは

確率密度関数 $f_{\mathrm{Y}}(x)$ を横方向に拡大縮小して '幅' 1 にする（副産物として縦にも拡大縮小する），平行移動して平均値 '重心' の位置を 0 にすること

逆に，標準化された 変換前 $Z$ から 変換後 $X = aZ + b$ を考えると，
$\mathrm{E}[X] = b$, $\mathrm{Var}(X) = a^2$.

## 命題

$X \sim Q(b, a^2)$ を標準化すると，$Z \sim Q(0, 1^2)$ になる．
逆に，標準化された $Z \sim Q(0, 1^2)$ から，平行移動拡大縮小 $X = aZ + b$ で，すべての $X \sim Q(b, a^2)$ を作れる．

母数を持つ分布の，標準ナントカ，は，代表選手，テンプレートのようなもの．

## L05-Q2

### Quiz(2 次関数の定める連続型分布)

連続型確率変数 $X \sim Q(3, 2^2)$ の確率密度関数は $f_{\mathrm{X}}(x)$ が次で与えられる．累積分布関数を $F_{\mathrm{X}}(x)$ とする．

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}\cdot 2}\left(1 - \frac{(x-3)^2}{5\cdot 2^2}\right) & (3 - 2\sqrt{5} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $X$ を標準化する 1 次式を求めよう．標準化された $Z$ の累積分布関数を $F_{\mathrm{Z}}(z)$ とする．
2. 確率 $P(2 \leq X \leq 4)$ を $Z$ の確率で書こう．$F_{\mathrm{Z}}(z)$ を使って表そう．
3. 確率 $P(X \leq d) = 0.05$ となる $d$ を $F_{\mathrm{Z}}^{-1}(z)$ を使って表そう．

# L05-Q3

## Quiz(連続一様分布の標準化)

連続型確率変数 $X$ は連続型一様分布 $U(3,9)$ にしたがう．すなわち，次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (3 \le x \le 9) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$，母分散 $\mathrm{Var}(X)$ を求めよう（記憶している公式で）.
2. 確率変数 $X$ を標準化しよう．つまり，標準化された確率変数 $Z$ を $X$ の 1 次式で表そう. $Z$ と $X$ の確率密度関数のグラフを描こう.
3. 確率 $P(X \le 5)$ を $Z$ の確率で書き換えよう．求めよう.

# ここまで来たよ

4 確率変数の 1 次式による変換

5 確率変数の標準化・正規分布
- 確率変数の 1 次式による変換
- 確率変数の標準化
- 標準正規分布

# 標準正規分布 standard normal distribution $N(0,1^2)$ の性質

## 定義 (標準正規分布 $N(0,1^2)$ 久保川 統計学入門 式 (5.2))

次の確率密度関数 を持つ確率変数 $Z$ を，標準正規分布 $N(0,1^2)$ にしたがうという．

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

累積分布関数

$$F_{\mathrm{Z}}(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(z')\mathrm{d}z'.$$

$\phi, \Phi$ は $f, F$ のギリシャ文字．あまりに有名分布なので専用文字を使う．
$\Phi(z)$ の積分は具体的に書けない．
Python で `scipy.stats.norm(loc=0,scale=1)`
Excel で`=norm.s.dist(z,FALSE)`

# 標準正規分布 $Z \sim N(0, 1^2)$ の確率密度関数と母期待値

$\phi(z)$ は偶関数（$y$ 軸に関して対称），$|z| \to \pm\infty$ で $z$ 軸に漸近．

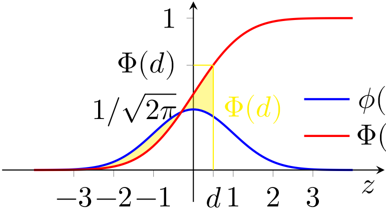
| $\phi(0)\times$ | $\phi(\pm1)/\phi(0)$ | $\phi(\pm2)/\phi(0)$ | $\phi(\pm3)/\phi(0)$ | $\phi(\pm\infty)/\phi(0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2\pi)^{-1/2}\times$ | $\mathrm{e}^{-1/2}$ | $\mathrm{e}^{-4/2}$ | $\mathrm{e}^{-9/2}$ | $\mathrm{e}^{-\infty}$ |
| $0.4\times$ | $0.6$ | $0.14$ | $0.01$ | $\to 0$ |

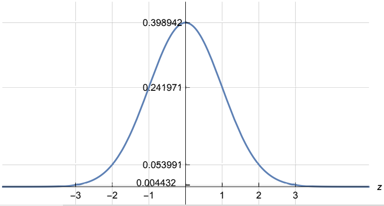
$k$ 次のモーメント ($k$: 自然数)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z^{2k-1}] &= 0, \quad \text{奇関数} \\
\mathrm{E}[Z^{2k}] &= (2k-1)!!_{\text{部分積分}} \\
&= 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2k-1), \\
\mathrm{E}[Z^{0}] &= 1, \\
\mathrm{E}[Z] &= 0, \\
\mathrm{Var}(Z) &= 1.
\end{aligned}
$$

久保川 統計学入門 p.111 　微積分 II

久保川 統計学入門 公式 5.17




たしかに, $Z$ は標準化された確率変数.

# 標準正規分布の確率と $\Phi(z)$ の数値

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき,

$$P(c < Z \leq d) = \int_c^d \phi(z')\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z' = \Phi(d) - \Phi(c).$$

$\Phi(z)$, 分位数関数 確率統計 I(2025)L03 $\Phi^{-1}(q)$ は LearnMoodle Python による正規分布や 久保川 統計学入門 公式 5.9, 数値表 (p.290) から．数値表は $z \geq 0$ だけなので $z < 0$ は，$\Phi(-z) + \Phi(z) = 1$ を利用して求める． 高校 数学 C

```
from scipy import stats
rvz=stats.norm(loc=0,scale=1) # Z ~ N(0,1^2)
rvz.cdf(d) # Φ(d)
rvz.ppf(q) # Φ^{-1}(q)
```

| $z$ | $\Phi^{-1}(q)$ | $-\infty$ | $-z'$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | $q$ | $0$ | $1-\Phi(z')$ | $1/2$ | $1$ |

上側分位点 $z_p = \Phi^{-1}(1-p)$ は $P(Z > z_p) = p$ となる点 久保川 統計学入門 公式 5.9

# L05-Q4

## Quiz(標準正規分布の確率)

$Z$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である．

1. 確率 $P(Z \leq 1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう．Python または表で小数として求めよう．
2. 確率 $P(-0.56 < Z \leq +1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう．
3. 確率 $P(-1.23 < Z \leq 0)$ を，累積分布関数 $\Phi(z)$ ただし, $z > 0$ で表そう．
4. 確率 $P(Z > d) = 0.025$ となる $d$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ の逆関数で表そう．Python または表で求めよう．

久保川 統計学入門 例題 5.12

# 正規分布

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L06(2026-05-25 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-18 Mon 13:16 JST hig"

今日の目標

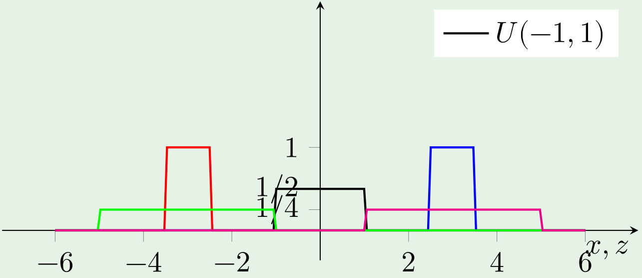
- 標準正規分布の母期待値，確率を求められる

久保川 統計学入門 §5.3.2

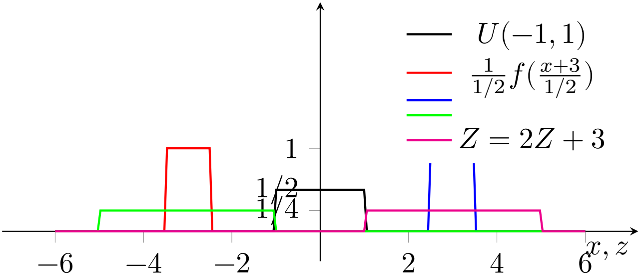
## L05-Q1
## TA Prob and Sol: 連続一様分布にしたがうの確率変数の 1 次変換

連続一様分布 $U(-1,1)$ にしたがう確率変数 $Z$ を考える．$Z$ の確率密度関数 $f(z)$ は黒で描かれている．

1. 確率変数 $X = 2Z + 3$ の確率密度関数を選ぼう．
2. 関数 $\frac{1}{1/2} f(\frac{x+3}{1/2})$ を選ぼう．



## 略解




## コメント

L05-Q2

TA Prob and Sol:2 次関数の定める連続型分布

連続型確率変数 $X \sim Q(3, 2^2)$ の確率密度関数は $f_{\mathrm{X}}(x)$ が次で与えられる．累積分布関数を $F_{\mathrm{X}}(x)$ とする．

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}\cdot 2}\left(1 - \frac{(x-3)^2}{5\cdot 2^2}\right) & (3 - 2\sqrt{5} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{5}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $X$ を標準化する 1 次式を求めよう．標準化された $Z$ の累積分布関数を $F_{\mathrm{Z}}(z)$ とする．
2. 確率 $P(2 \leq X \leq 4)$ を $Z$ の確率で書こう．$F_{\mathrm{Z}}(z)$ を使って表そう．
3. 確率 $P(X \leq d) = 0.05$ となる $d$ を $F_{\mathrm{Z}}^{-1}(z)$ を使って表そう．

略解

# ここまで来たよ

5 確率変数の標準化

6 正規分布
- 標準正規分布

# 標準正規分布 standard normal distribution $N(0,1^2)$ の性質

**定義 (標準正規分布 $N(0,1^2)$ 久保川 統計学入門 式 (5.2))**

次の確率密度関数 を持つ確率変数 $Z$ を，標準正規分布 $N(0,1^2)$ にしたがうという．

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

累積分布関数

$$F_{\mathrm{Z}}(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(z')\mathrm{d}z'.$$

$\phi, \Phi$ は $f, F$ のギリシャ文字．あまりに有名分布なので専用文字を使う．
$\Phi(z)$ の積分は具体的に書けない．
Python で `scipy.stats.norm(loc=0,scale=1)`
Excel で`=norm.s.dist(z,FALSE)`

# 標準正規分布 $Z \sim N(0, 1^2)$ の確率密度関数と母期待値

$\phi(z)$ は偶関数（$y$ 軸に関して対称），$|z| \to \pm\infty$ で $z$ 軸に漸近.

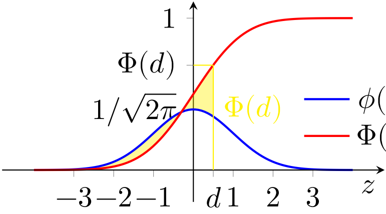
| $\phi(0)\times$ | $\phi(\pm 1)/\phi(0)$ | $\phi(\pm 2)/\phi(0)$ | $\phi(\pm 3)/\phi(0)$ | $\phi(\pm\infty)/\phi(0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2\pi)^{-1/2}\times$ | $\mathrm{e}^{-1/2}$ | $\mathrm{e}^{-4/2}$ | $\mathrm{e}^{-9/2}$ | $\mathrm{e}^{-\infty}$ |
| $0.4\times$ | $0.6$ | $0.14$ | $0.01$ | $\to 0$ |

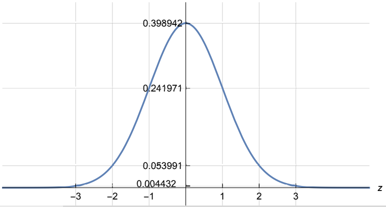
$k$ 次のモーメント ($k$: 自然数)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Z^{2k-1}] &= 0, \quad \text{奇関数} \\ \mathrm{E}[Z^{2k}] &= (2k-1)!! \text{部分積分} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \cdot (2k-1), \\ \mathrm{E}[Z^0] &= 1, \\ \mathrm{E}[Z] &= 0, \\ \mathrm{Var}(Z) &= 1. \end{aligned}$$

久保川 統計学入門 p.111 微積分 II

久保川 統計学入門 公式 5.17




たしかに, $Z$ は標準化された確率変数.

# 標準正規分布の確率と $\Phi(z)$ の数値

$Z \sim N(0,1^2)$ のとき,

$$P(c < Z \leq d) = \int_c^d \phi(z')\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z' = \Phi(d) - \Phi(c).$$

$\Phi(z)$, 分位数関数 確率統計 I(2025)L03 $\Phi^{-1}(q)$ は LearnMoodle Python による正規分布や 久保川 統計学入門 公式 5.9, 数値表 (p.290) から．数値表は $z \geq 0$ だけなので $z < 0$ は，$\Phi(-z) + \Phi(z) = 1$ を利用して求める． 高校 数学 C

```
from scipy import stats
rvz=stats.norm(loc=0,scale=1) # Z ~ N(0,1^2)
rvz.cdf(d) # Φ(d)
rvz.ppf(q) # Φ^{-1}(q)
```

| $z$ | $\Phi^{-1}(q)$ | $-\infty$ | $-z'$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(z)$ | $q$ | $0$ | $1-\Phi(z')$ | $1/2$ | $1$ |

上側分位点 $z_p = \Phi^{-1}(1-p)$ は $P(Z > z_p) = p$ となる点 久保川 統計学入門 公式 5.9

## L06-Q1

### Quiz(標準正規分布の確率)

$Z$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である.

1. 確率 $P(Z \leq 1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう．Python または表で小数として求めよう.
2. 確率 $P(-0.56 < Z \leq +1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう.
3. 確率 $P(-1.23 < Z \leq 0)$ を，累積分布関数 $\Phi(z)$ ただし, $z > 0$ で表そう.
4. 確率 $P(Z > d) = 0.025$ となる $d$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ の逆関数で表そう．Python または表で求めよう.

久保川 統計学入門 例題 5.12