累積分布関数・分位数関数・連続一様分布

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I　L03(2026-04-27 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-15 Fri 09:10 JST hig"

今日の目標

- 連続型確率変数の累積分布関数と分位点関数が計算できる 久保川 統計学入門 §5.1
- 連続一様分布の母期待値，累積分布関数，分位点関数が計算できる 久保川 統計学入門 §5.3.1

L02-Q1

TA Prob and Sol: 離散的な確率変数の母平均・母分散・母標準偏差

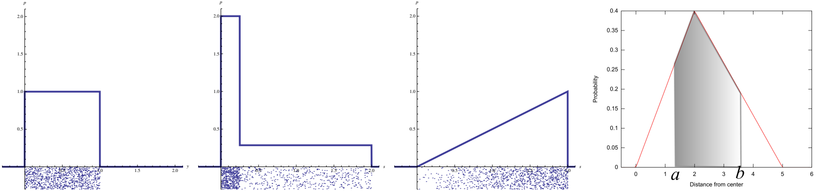
整数に値をとる離散型確率変数 X は次の確率関数を持つ．

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3} & (x=3)\\ \frac{1}{3} & (x=6)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

1. $\mathrm{E}[X]$ の値を選ぼう．
   1. -6
   2. -4
   3. 0
   4. $+4$
   5. $+6$
2. $\mathrm{Var}(X)$ の値を選ぼう．
   1. -9
   2. -6
   3. 0
   4. $+6$

ここまで来たよ

復習: 連続型確率変数の確率密度関数



横軸下の細かい点が, 標本 (縦方向の位置はランダムで意味なし)

命題 (確率密度関数と確率 久保川 統計学入門 p.104**)**

$$P(c < X \leq d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{下側面積})$$

確率密度関数と母平均値，母分散の直観的な意味（連続型バージョン）

形のわからない面積 1 の板（確率密度関数のグラフとも言う）が，x 軸のどこかに置かれてる．

- どこに置かれた？ $\rightsquigarrow$ 母平均値
  - 重心 $\rightsquigarrow$ 板を指 1 本で支えられる位置
- どのくらいの幅？ $\rightsquigarrow$ 母分散 $()^{1/2}$．
  - 高さは，面積 1 であることから決まる

板のいちばん簡単な形は長方形 $\rightsquigarrow$ 連続一様分布
板の面積は確率に対応する

$$\boxed{\text{位置 } x} \quad \begin{array}{c} \text{累積分布関数 } F \\ \longrightarrow \\ \text{分位数関数 } F^{-1} \\ \longleftarrow \end{array} \quad \boxed{\text{確率 } p = P(X \le x)}$$

k 次のモーメント

$f(x)$: 確率密度関数, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) \mathrm{d}x.$$

$x > 0$ である下限の x を x_{min}, $x > 0$ である上限の x を x_{max} とすると,

- $\mathrm{E}[X^0] = 1$.
- $x_{\mathsf{min}} \leq \mathrm{E}[X^1] \leq x_{\mathsf{max}}$.
- $0 \leq \mathrm{E}[(X - \mu)^2] \leq (x_{\mathsf{max}} - x_{\mathsf{min}})^2$.
- $\mathrm{E}[X^{2k}] > 0$.
- $f(x)$ が，$x > 0$ でのみ $f(x) > 0$ のとき，$\mathrm{E}[X^k] > 0$.
- $f(x)$ が，$x < 0$ でのみ $f(x) > 0$ のとき，$\mathrm{E}[X^{2k}] > 0$, $\mathrm{E}[X^{2k+1}] < 0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき，$\mathrm{E}[X^{2k+1}] = 0$.

L03-Q1

Quiz(連続型確率変数のモーメントの性質)

連続型確率変数 X は確率密度関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2^5}x^4 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$ を持つ．k 次のモーメントとして正しいものを選ぼう．

1. $\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$
2. $\frac{5\cdot 2^k}{5+k}$
3. $-\frac{5\cdot(-2)^k}{5+k}$
4. $-\frac{5\cdot 2^k}{5+k}$

ここまで来たよ

定義 (累積分布関数 久保川 統計学入門 §4.1(p.83)§5.1(p.104))

$F(x) = P(X \leq x)$ を累積分布関数（分布関数, 確率分布関数）という.

命題 (累積分布関数の性質 久保川 統計学入門 p.104)

(C1) $F(x)$ は広義単調増加関数
(C2) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$
(C3) $P(c < X \leq d) = F(d) - F(c).$

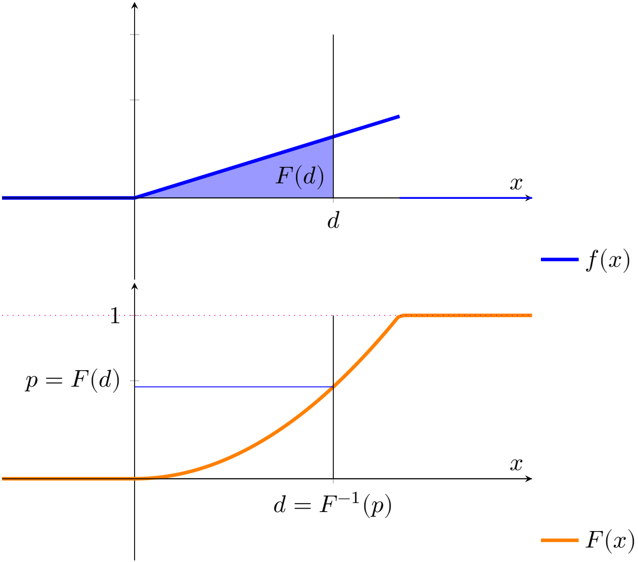
定義 (連続型確率変数の累積分布関数 久保川 統計学入門 p.104)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

命題 (久保川 統計学入門 公式 5.1(p.105))

Fが微分可能なとき, $f(x)$ は $F(x)$ の導関数

$\boxed{\text{確率密度関数 } f}$ $\underset{\text{微分}\ \leftarrow}{\overset{\text{積分}}{\longrightarrow}}$ $\boxed{\text{累積分布関数 } F}$ 久保川 統計学入門 例題 5.2



久保川 統計学入門 図 5.4

ここまで来たよ

2 連続型確率変数

3 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布
- 連続型確率変数の復習
- 累積分布関数
- 分位数関数と分位数
- 連続一様分布

連続型確率変数の分位数関数

定義 (分位数関数 久保川 統計学入門 p.109)

確率変数 X の 累積分布関数の, 区間 $[0,1]$ で定義された逆関数 $x = F^{-1}(p)$ を分位数関数, $F^{-1}(q)$ を, q-(下側) 分位点 $F^{-1}(1-q)$ を, q-上側分位点 という.

意味

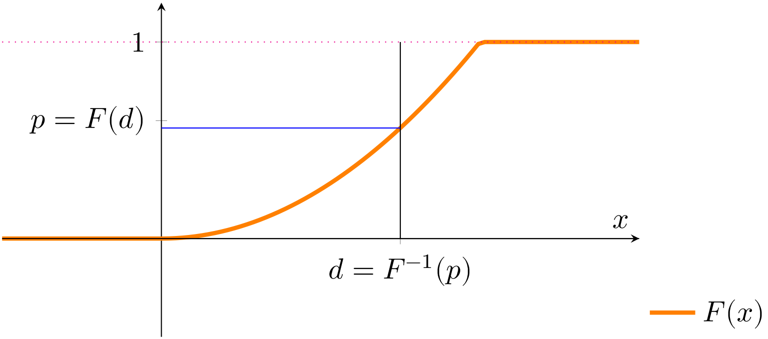
'q-下側分位点とは，確率 $P(X \leq d)$ が q に等しくなる**最小ぎりぎりの**境い目 $x = d$'

$F^{-1}(y)$ は, 確率 $y = q$ を与えると, そうなる境い目を返してくれる関数.

'q-上側分位点とは，確率 $P(X \geq d)$ が q に等しくなる**最大ぎりぎりの**境い目 $x = d$'

言い訳

定義域 $[0,1]$ の端は含められない場合もある．$F(x)$ が狭義単調増加でない限り逆関数 F^{-1} は定義できない．これらのややこしいケースには深入りしない．離散型にも深入りできない．



例 (中央値・四分位点)

$F^{-1}(\frac{1}{2})$ は分布の (母) 中央値, $F^{-1}(\frac{1}{4}), F^{-1}(\frac{3}{4})$ は分布の (母) 四分位点.

データ分析

(標本) 中央値，四分位点 久保川 統計学入門 §1.2.3

L03-Q2

Quiz(連続的な確率変数の確率・累積分布関数・分位数関数)

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & (0 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
2. 確率 $P(X \geq 3)$ を求めよう.
3. 確率 $P(-1 < X \leq 2)$ を求めよう.
4. 分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
5. 確率 $P(X \leq d) = \frac{1}{3}$ となる d を求めよう.

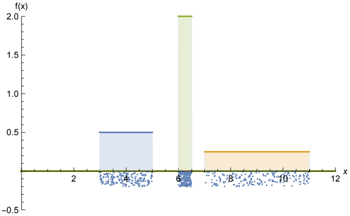
ここまで来たよ

連続一様分布 久保川 統計学入門 §4.3.1

（連続）一様分布 $U(c,d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c,d]$ の連続一様分布 $U(c,d)$ にしたがうという.

$$f(x) == \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x \leq d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



$U(4,6), U(6,6.5), U(7,11).$

連続一様分布 久保川 統計学入門 §4.3.1

連続一様分布

```
import scipy.stats
rvx = stats.uniform(loc=c,scale=d-c) # U(c,d)
```

Colab LearnMoodle 連続型確率変数-連続一様分布.ipynb loc=位置，scale=尺度

L03-Q3

Quiz(連続一様分布)

連続型確率変数 X が連続一様分布 $U(c,d)$ にしたがう.

1. モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母標準偏差 $\mathrm{Var}(X)^{1/2}$ を求めよう.

さっき想像した，母平均値・母標準偏差の意味とマッチしてる?

		母ナントカ	scipy.stats
位置 広がり	位置母数 尺度母数	$\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}$ $\mathrm{Var}(X)^{1/2} = \frac{d-c}{\sqrt{12}}$	loc=c scale=$d-c$

$U(c,d)$ に対するこの結果は，公式のように記憶して使おう.

久保川 統計学入門 発展問題問 6(p.125)

scipy による連続型確率変数

https://colab.research.google.com

```
import numpy as np # ライブラリの読込
from scipy import stats

rvx = stats.uniform(loc=2,scale=3) # 連続一様分布，専用の名前がある．
                                   # loc=c， scale=d − c
# 母ナントカ．答はいつも同じ
rvx.mean()# 母平均値
rvx.var() # 母分散
rvx.std() # 母標準偏差
rvx.moment(k) k 次のモーメント
rvx.pdf(x) 確率密度関数 probability density function
rvx.cdf(x) 累積分布関数 cumurative density function
rvx.ppf(p) 分位数関数 percent point function

# データ分析 でやってた標本ナントカ 毎回違った結果
sample=rvx.rvs(size=30) # サイズ30の標本抽出
sample.mean() # 標本平均値
sample.var()  # 不偏標本平均値
sample.std()  # 標本標準偏差
```

L03-Q4

Quiz(連続一様分布の累積分布関数・分位数関数)

連続型確率変数 X は連続一様分布 $U(-9,-3)$ にしたがう．すなわち，次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ．

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (-9 \le x \le -3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．グラフを描こう．
2. 確率 $P(X \le -7)$ を求めよう．
3. 確率 $P(-7 \le X \le -5)$ を求めよう．
4. 確率 $P(-4 \le X \le +1)$ を求めよう．
5. 確率 $P(X \ge -8)$ を求めよう．
6. $F(x)$ の定義域を $[-9,-3]$ に制限して，分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう．グラフを描こう．
7. 確率 $P(X \le d) = \frac{1}{3}$ となる d を求めよう．

L03-Q5

Quiz(連続型確率変数の累積分布関数・分位数関数)

連続型確率変数 X が次の確率密度関数を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-2) & (2 \leq x \leq 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう. グラフを描こう.
2. 確率 $P(X \geq 5)$ を求めよう.
3. $F(x)$ の定義域を $[2,6]$ に制限して, 分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう. グラフを描こう.
4. 中央値, 四分位点を求めよう.