

確率変数の 1 次式による変換

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L04(2026-05-11 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-05-11 Mon 21:46 JST hig"

今日の目標

- Google Colab で確率, 分位数が計算できる
- 確率変数の 1 次式による変換の意味が説明できる



L03-Q1

TA Prob and Sol: 連続型確率変数のモーメントの性質

連続型確率変数 X は確率密度関数 $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2^5}x^4 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$ を持

つ. k 次のモーメントとして正しいものを選ぼう.

- ① $\frac{5 \cdot (-2)^k}{5+k}$
- ② $\frac{5 \cdot 2^k}{5+k}$
- ③ $-\frac{5 \cdot (-2)^k}{5+k}$
- ④ $-\frac{5 \cdot 2^k}{5+k}$

略解

$$\frac{5 \cdot (-2)^k}{5+k}.$$

定義にしたがって定積分することで求められるが, 次の考察から消去法で1つに絞ることもできる.

$E[X^0] = 1$ が成立するのは最初2つのみ. この2つのうち, $E[X^1] < 0$ となるのは $\frac{5 \cdot (-2)^k}{5+k}$ のみ.

コメント

L03-Q2

TA Prob and Sol: 連続的な確率変数の確率・累積分布関数・分位数関数

連続型確率変数 X は次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & (0 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
- ② 確率 $P(X \geq 3)$ を求めよう.
- ③ 確率 $P(-1 < X \leq 2)$ を求めよう.
- ④ 分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
- ⑤ 確率 $P(X \leq d) = \frac{1}{3}$ となる d を求めよう.

略解

- ① $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$
 $x < 0$ のとき, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$
 $x > 4$ のとき, $F(x) = 1$ (全確率).
 $0 < x \leq 4$ のとき, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{8}t dt = \frac{1}{16}x^2.$
- ② $P(X \geq 3) = P(3 \leq X < +\infty) = F(+\infty) - F(3) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$
- ③ $P(-1 < X \leq 2) = F(2) - F(-1) = \frac{1}{4}.$
- ④ $0 \leq x \leq 4$ に対して $p = F(x)$ を解くと, $x = \pm 4\sqrt{p}$ このうち,
 $0 \leq x \leq 4$ を値域とするのは $x = 4\sqrt{p}.$
- ⑤ 分位数関数の値 $d = F^{-1}(\frac{1}{3}) = 4 \cdot 3^{-1/2}.$

L03-Q3

TA Prob and Sol: 連続一様分布

連続型確率変数 X が連続一様分布 $U(c, d)$ にしたがる。

- ① モーメント $E[X^k]$ を求めよう。
- ② 母平均値 $E[X]$ を求めよう。
- ③ 母標準偏差 $\text{Var}(X)^{1/2}$ を求めよう。

略解

- ① $E[X^k] = \frac{1}{d-c} \int_c^d x^k dx = \frac{1}{k+1} \frac{d^{k+1} - c^{k+1}}{d-c} = \frac{1}{k+1} (d^k + d^{k-1}c + \dots + c^k)$.
- ② $E[X^1] = \frac{c+d}{2}$.
- ③ $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X^1]^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$. $\text{Var}(X)^{1/2} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}$.

L03-Q4

TA Prob and Sol: 連続一様分布の累積分布関数・分位数関数

連続型確率変数 X は連続一様分布 $U(-9, -3)$ にしたがう．すなわち，次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ．

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (-9 \leq x \leq -3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① 累積分布関数 $F(x)$ を求めよう．グラフを描こう．
- ② 確率 $P(X \leq -7)$ を求めよう．
- ③ 確率 $P(-7 \leq X \leq -5)$ を求めよう．
- ④ 確率 $P(-4 \leq X \leq +1)$ を求めよう．
- ⑤ 確率 $P(X \geq -8)$ を求めよう．
- ⑥ $F(x)$ の定義域を $[-9, -3]$ に制限して，分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう．グラフを描こう．
- ⑦ 確率 $P(X \leq d) = \frac{1}{3}$ となる d を求めよう．

略解

$$\textcircled{1} F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

$$x \leq -9 \text{ の時, } F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

$$-9 \leq x \leq -3 \text{ の時, } F(x) = \int_{-9}^x \frac{1}{6}t dt = \frac{1}{6}(x+9).$$

$$-3 < x \text{ の時, } F(x) = \int_{-\infty}^{-9} 0 dx + \int_{-9}^{-3} \frac{1}{6}t dt + \int_{-3}^x 0 dt.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -9) \\ \frac{x-(-9)}{-3-(-9)} & (-9 < x \leq -3) \\ 1 & (-3 < x) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} P(X \leq -7) = F(-7) = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} P(-7 \leq X \leq -5) = F(-5) - F(-7) = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{4} P(-4 \leq X \leq +1) = F(+1) - F(-4) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$P(-4 \leq X \leq +1) = \int_{-4}^{+1} f(x)dx = \int_{-4}^{-3} \frac{1}{6}dx.$$

- ⑤ $P(X \geq -8) = P(-8 \leq X < +\infty) = F(+\infty) - F(-8) = 1 - F(-8) = \frac{5}{6}$.
- ⑥ $p = \frac{x+9}{6}$ を x について解いて, $x = 6p - 9$. よって $F^{-1}(p) = 6p - 9$.
- ⑦ $F^{-1}(\frac{1}{3}) = -7$. すでに検算していた.

ここまで来たよ

3 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布

4 確率変数の 1 次式による変換

- 分位数関数
- 確率変数の 1 次式による変換

復習: 分位数関数 I

L04-Q1

Quiz(連続一様分布の分位数関数)

連続一様分布 $U(-4, 4)$ にしたがう確率変数 X を考える.

- ① X の累積分布関数 $F(x)$ を求めよう.
- ② X の分位数関数 $F^{-1}(p)$ を求めよう.
- ③ 確率 $P(X \geq d_1) = 0.05$ となる d_1 を F^{-1} で表わし, 求めよう.
- ④ 確率 $P(|X| \geq d_2) = 0.05$ となる d_2 を F^{-1} で表わし, 求めよう.

ここまで来たよ

3 累積分布関数・分位数関数・連続一様分布

4 確率変数の 1 次式による変換

- 分位数関数
- 確率変数の 1 次式による変換

2 次関数の確率密度関数で表される分布 I

L04-Q2

Quiz(確率密度関数が 2 次関数の分布)

連続型確率変数 Z の確率密度関数を $f(z)$, 累積分布関数を $F(z)$ とする.

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

- 1 $f(z), F(z)$ のグラフの概形を描こう.
- 2 モーメント $E[Z^k]$, 母平均値 $E[Z]$, 母分散 $\text{Var}(Z)$ を求めよう.
- 3 確率 $P(|Z| \leq 1)$ を $F(z)$ で表わし, 数値で求めよう.
- 4 $P(Z \geq d_1) = 0.05$ となる d_1 を F^{-1} で表わし, 数値で求めよう.
- 5 $P(|Z| \geq d_2) = 0.05$ となる d_2 を F^{-1} で表わし, 数値で求めよう.

2 次関数の確率密度関数で表される分布 II

実は, 3 次方程式を解いて, $F^{-1}(p) = 2\sqrt{5} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(1 - 2p) - \frac{2}{3}\pi\right)$.

確率変数の 1 次式による変換

確率変数 $Z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ をサイコロの目, それに応じてもらえる賞金を $X = 500 + 100Z = 600, 700, 800, 900, 1000, 1100$ 累積分布関数をそれぞれ $F_Z(z), F_X(x)$ とすると,

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = F_X(500 + 100z) = P(X \leq 500 + 100z)$$

$$F_Z\left(\frac{x-500}{100}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-500}{100}\right) = P(500 + 100Z \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

大文字：確率変数，小文字：実現値（2 とか 700 とかを代入できる）。

確率密度関数 f 積分
→
微分
←累積分布関数 F

久保川 統計学入門 例題 5.2

命題 (久保川 統計学入門 公式 5.24(p.123))

一般に、確率変数 Z, X が $X = aZ + b$ ($a > 0$) の関係にあるとき、累積分布関数を $F_Z(z), F_X(x)$ とすると、

$$F_Z\left(\frac{x-b}{a}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-b}{a}\right) = P(aZ + b \leq x) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

さらに、 Z, X が連続確率変数で、確率密度関数 $f_Z(z), f_X(x)$ を持ち、 $\frac{d}{dz}F_Z(z) = f_Z(z), \frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$ を満たすとき、上の両辺を x で微分して、

$$\frac{1}{a}f_Z\left(\frac{x-b}{a}\right) = f_X(x)$$

つまり、横に a 倍拡大、縦に $1/a$ 倍した後、水平に b だけ平行移動したグラフになる。

復習：グラフの平行移動と拡大縮小

$y = f(x)$ のグラフを,

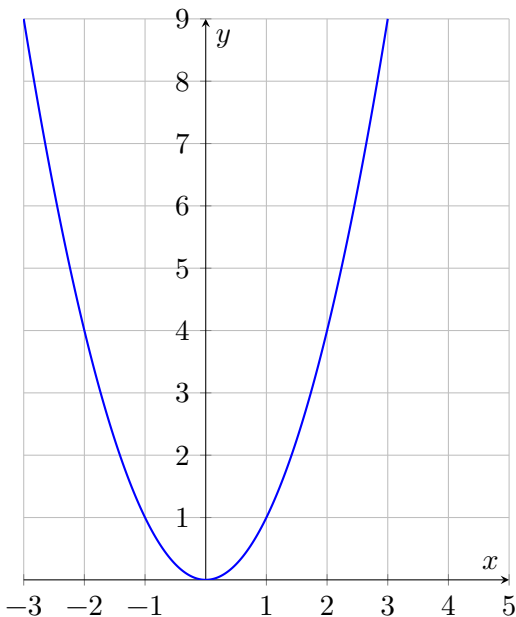
- 横に b 平行移動すると $y = f(x - b)$.
- 横に b , 縦に d 平行移動すると $y - d = f(x - b)$.
- y 軸を中心に横に a 倍すると, $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$.
- y 軸を中心に横に a 倍, x 軸を中心に縦に c 倍すると, $\frac{y}{c} = f\left(\frac{x}{a}\right)$.
- まず y 軸を中心に横に a 倍, x 軸を中心に縦に c 倍, 次に横に b 平行移動すると, $\frac{y}{c} = f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

$y = x^2$

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2$.
- $y = c \cdot \left(\frac{x-b}{a}\right)^2$

$$y = x^2,$$
$$b = 3, d = 0,$$
$$a = 2, c = 1/2.$$

- $y = (x - b)^2$
- $y = (x - b)^2 + d$
- $y = (x/a)^2$
- $y = c \cdot (x/a)^2.$
- $y = c \cdot \left(\frac{x-b}{a}\right)^2$



L04-Q3

Quiz(2 次関数の定める連続型分布)

連続型確率変数 Z の確率密度関数 $f_Z(z)$ が次で与えられる．累積分布関数を $F_Z(z)$ とする．

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{3}{20\sqrt{5}}(z^2 - 5) & (|z| \leq \sqrt{5}) \\ 0 & (|z| > \sqrt{5}) \end{cases}$$

- ① $X_1 = Z + 3$ の確率密度関数 $f_1(x)$ を求めグラフを描こう．
- ② $X_2 = 2Z$ の確率密度関数 $f_2(x)$ を求めグラフを描こう．
- ③ $X_3 = 2Z + 3$ の平均と分散を求めよう． X_3 の確率密度関数 $f_3(x)$ を求めグラフを描こう．
- ④ 確率 $P(4 < X_3 \leq 5)$ を $F_Z(z)$ で表そう．
- ⑤ $P(X_3 \leq d) = 0.01$ となる d を $F_Z^{-1}(p)$ で表そう．

この授業だけの記号

2 次関数の確率密度関数が定める分布

確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = -\frac{3}{4\sqrt{5}a} \left(\frac{(x-b)^2}{5a^2} - 1 \right)$$

を持つとき, $X \sim Q(b, a^2)$ とかく.

さっきの $Z \sim Q(0, 1^2)$.

$X \sim Q(b, a^2)$ ならば $E[X] = b, \text{Var}(X) = a^2$.